Algebra 1 – Matematica – A.A. 2021-22, I Semestre

Esercizi settimanali

Settimana 9 - (*consegna lunedì 6/12*)

Ex.1 - Sia $\varphi : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$ uno $\mathbb{Z}$-omomorfismo dato dalla moltiplicazione per la matrice intera A. Dimostrare che l'immagine di φ è di indice finito in $\mathbb{Z}^k$ se e solo se il determinante di A è non nullo e che, in tal caso, l'indice di $\mathrm{Im}(\varphi)$ come sottogruppo di $\mathbb{Z}^k$ è pari a $|\det(A)|$.

Ex.2 - Sia $\mathbb{F}$ un campo e sia R un dominio di integrità, contenente $\mathbb{F}$ come sottoanello. Dimostrare che se R ha dimensione finita su $\mathbb{F}$ allora R è un campo.

Ex.3 - Calcolare il polinomio minimo di $1 + \sqrt[3]{4}$.

Ex.4 - Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ su ciascuno dei seguenti campi:
(a) $\mathbb{Q}$; (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$; (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$; (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

Ex.5 - Sia α una radice complessa del polinomio irriducibile $x^3 - 3x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Scrivere esplicitamente l'inverso di $\alpha^2 + \alpha + 1$ nella forma $a + b\alpha + c\alpha^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Ex.6 - Sia $\mathbb{F}$ un campo e α un elemento che genera un'estensione $\mathbb{F}(\alpha)$ di $\mathbb{F}$ di grado 5. Dimostrare che $\mathbb{F}(\alpha^2) = \mathbb{F}(\alpha)$.

Ex.7 - Dimostrare che $\zeta_5 \notin \mathbb{Q}(\zeta_7)$, dove $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

Ex.8 - Se $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di ciascuno dei seguenti elementi:
(a) ζ_8; (b) ζ_9; (c) ζ_{10}; (d) ζ_{12}.