ALGEBRA 1 - Primo esame scritto

31 gennaio 2021

1. Trovare tutti gli x interi soluzioni del seguente sistema alle congruenze:

$$\begin{cases} 4x & \equiv & 2 \mod 6 \\ 2^x & \equiv & 3 \mod 5 \end{cases}$$

2. Sia G un gruppo di ordine 36 tale che i suoi 3-Sylow non siano normali.
   (a) Spiegare perché i 3-Sylow di G siano abeliani.
   (b) Mostrare che l'intersezione di due 3-Sylow distinti contiene esattamente tre elementi.
   (c) Mostrare che G ha centro non banale.

3. Si consideri, nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, l'ideale $I = (3+4i, 7+6i)$.
   (a) Dire se $\mathbb{Z}[i]/I$ sia un dominio d'integrità.
   (b) Dire se $\mathbb{Z}[i]/I$ sia un campo.
   (c) Quanti elementi possiede $\mathbb{Z}[i]/I$?

4. Sia M il gruppo abeliano generato da quattro elementi x, y, z, w soggetti alle relazioni

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 5w &= 0 \\ 2x + y + 4z + 10w &= 0 \end{aligned}$$

   Identificare M (a meno di isomorfismo) come prodotto diretto di gruppi ciclici.

5. Mostrare che l'anello $A = \mathbb{Z}[x]/(3, x^3 + x^2 - 1)$ è un campo finito e determinarne il numero di elementi.