

Algebra 1

Prof. A. D'Andrea, A. De Sole, G. Mondello

Prova scritta del 17-2-2022

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Docente: **D'Andrea \ De Sole - Mondello** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Sia G il gruppo delle matrici 3×3 triangolari superiori e invertibili a coefficienti nel campo \mathbb{F}_2 con due elementi.

- (a) Calcolare l'ordine di G .
- (b) Spiegare perché G abbia centro non banale.
- (c) Esibire almeno un elemento $g \in G$ di ordine 4.

Soluzione:

Risposta: (a) $|G| =$ (b) $Z(G) \neq \{1\}$ perché: (c) $g =$

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine finito e sia $H \subset G$ un sottogruppo di indice $[G : H] = p$ primo. Dimostrare che H è normale oppure ci sono esattamente p sottogruppi di G coniugati a H .

Soluzione:

Risposta: Dim. (in breve):

Esercizio 3. Si consideri l'omomorfismo di anelli $\phi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $x \mapsto \frac{1}{2} + \sqrt{2}$. Mostrare che il nucleo è un ideale principale e determinarne un generatore.

Soluzione:

Risposta: Generatore del nucleo di ϕ :

Esercizio 4. Sia $L \subset \mathbb{Z}^2$ il reticolo generato dai vettori $v_1 = (3, 4)^T$ e $v_2 = (2, 5)^T$. Determinare l'indice di L in \mathbb{Z}^2 . Determinare una base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ di \mathbb{Z}^2 e interi positivi d_1, d_2 tali che (d_1e_1, d_2e_2) sia una base di L .

Soluzione:

Risposta: $\mathcal{B} =$ $d_1, d_2 =$

Esercizio 5. Si consideri il polinomio $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e siano $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ le sue tre radici, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\bar{\beta} \neq \beta \in \mathbb{C}$. Sia $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su \mathbb{Q} .

- (a) Determinare il grado di \mathbb{K} su \mathbb{Q} .
- (b) Dire se $\sqrt{29}$ appartenga a \mathbb{K} .
- (c) Mostrare che α^2 ha grado 3 su \mathbb{Q} e determinare il polinomio irriducibile $g(x)$ per α^2 su \mathbb{Q} .

Soluzione:

Risposta: (a) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = \boxed{}$ (b) $\sqrt{29} \in \mathbb{K}$? **SI \ NO** (c) $g(x) = \boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia