

# Algebra 1

*Prof. A. D'Andrea, A. De Sole, G. Mondello*

**Prova scritta del 14-6-2022**

*Nome e Cognome:* \_\_\_\_\_

*Numero di Matricola:* \_\_\_\_\_

*Docente:* **D'Andrea \ De Sole - Mondello** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

**Esercizio 1.** Sia  $G = \mathbb{F}_{17} \setminus \{0\}$  il gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli nel campo  $\mathbb{F}_{17}$ .

(a) Trovare un generatore  $x$  di  $G$ .

(b) Sia  $\phi : G \rightarrow G'$  un omomorfismo non banale da  $G$  ad un gruppo  $G'$  di ordine 6. Quali possono essere il nucleo e l'immagine di  $\phi$ ?

**Soluzione:**

**Risposta:** (a)  $x =$

(b)  $\ker \phi =$

$\text{Im } \phi =$

**Esercizio 2.**  $G$  è un gruppo di ordine 105.

- (a) Mostrare che i 5- e i 7-Sylow di  $G$  non possono essere tutti non normali.
- (b) Mostrare che  $G$  contiene elementi di ordine 35.

**Soluzione:**

**Esercizio 3.** Se  $I, J$  sono ideali dell'anello commutativo con unità  $A$ , si definisce

$$(I : J) = \{a \in A \mid aJ \subset I\}.$$

- (a) Mostrare che  $(I : J)$  è un ideale di  $A$ .
- (b) Mostrare che  $I \subset (I : J)$ .
- (c) Calcolare  $(I : J)$  quando  $A = \mathbb{Z}, I = (24), J = (36)$ .

**Soluzione:**

**Risposta:** (c)  $(I : J) =$

**Esercizio 4.** Determinare tutti i modi di scrivere 2450 come somma di due quadrati.

**Soluzione:**

**Risposta:** 2450 =

**Esercizio 5.** Si consideri l'anello  $R = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ . Trovare un intero primo  $p$  tale che  $(p)$  sia un ideale primo di  $R$ . (Giustificare la risposta.)

**Soluzione:**

**Risposta:**  $p =$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia



Foglio per la brutta copia