

Algebra 1

Prof. A. D'Andrea, A. De Sole, G. Mondello

Prova scritta del 1 luglio 2022

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Docente: **D'Andrea \ De Sole - Mondello** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Per quali interi n esiste un omomorfismo tra gruppi $\phi : \mathbb{Z}/48 \rightarrow C_{36} = \langle x \rangle$ tale che $\phi(\bar{1}) = x^n$? Per quali interi n tale omomorfismo è suriettivo?

Soluzione:

Esercizio 2. Determinare tutti i gruppi finiti che contengano al più tre classi di coniugio.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia $E : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_7$ l'applicazione definita da $E(p(x)) =$ classe di resto modulo 7 di $p(2)$.

- (a) Mostrare che E è un omomorfismo di anelli.
- (b) Mostrare che $2x + 3$ e $x^2 + x + 1$ appartengono a $\ker E$.
- (c) Mostrare che 7 e $x - 2$ appartengono all'ideale $(2x + 3, x^2 + x + 1)$ di $\mathbb{Z}[x]$.
- (d) Descrivere l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/(2x + 3, x^2 + x + 1)$.

Soluzione:

Esercizio 4. Sia V un modulo sull'anello $\mathbb{Q}[t]$ generato da due elementi v_1 e v_2 soggetti alle relazioni

$$\begin{aligned}(1 - t^3)v_1 + tv_2 &= 0, \\ (1 - t^3)v_2 &= 0.\end{aligned}$$

1. Mostrare che V è un modulo ciclico (ovvero generato da un solo elemento) e determinarne un generatore v_0 .
2. Determinare un generatore dell'ideale $I \subset \mathbb{Q}[t]$ che consiste dei polinomi $p(t)$ tali che $p(t)v_0 = 0$.
3. Calcolare la dimensione di V come spazio vettoriale su \mathbb{Q} .
4. Fissare una base di V come spazio vettoriale su \mathbb{Q} e scrivere la matrice dell'applicazione lineare $T : V \rightarrow V$ data da $T(v) = tv$.

Soluzione:

Esercizio 5. Sia $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ un'estensione algebrica di campi e sia R un anello contenente \mathbb{F} e contenuto in \mathbb{K} . Dire se la seguente affermazione è vera (fornendo una dimostrazione) o falsa (fornendo un controesempio): R è un campo.

Soluzione:

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia