Algebra 1

Proff. A. D'Andrea, A. De Sole, G. Mondello

Prova scritta del 7 settembre 2022

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

Docente: **D'Andrea** $\backslash$ **De Sole - Mondello** (cerchiare il/i docente/i).

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Esercizio 1. Sia G il gruppo delle matrici 3×3 triangolari superiori unipotenti, ovvero con tutti elementi 1 sulla diagonale principale, a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_3$ con tre elementi.

(a) Calcolare l'ordine di G.

(b) Esibire elementi $a, b \in G$ che non commutano tra loro.

(c) Mostrare che ogni elemento $M \in G$ soddisfa $M^3 = \mathrm{Id}$.

(d) Calcolare il centro $Z(G)$ del gruppo G.

Soluzione:

Risposta:

(a) $|G| =$ $\boxed{}$ (b) $a, b :$ $\boxed{}$ (d) $Z(G) =$ $\boxed{}$

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine $n = pqr$ con $p < q < r$ primi. Mostrare che G non è semplice.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia I un ideale dell'anello A commutativo con unitÃă. Il radicale di I ÃÍ definito come

$$\sqrt{I} := \{a \in A \mid a^n \in I \text{ per qualche } n > 0\}.$$

(a) Mostrare che $\sqrt{I}$ ÃÍ un ideale di A.

(b) Mostrare che, se P ÃÍ un ideale primo, allora $\sqrt{P} = P$.

(c) Mostrare che, se P ÃÍ un ideale primo che contiene I, allora $\sqrt{I} \subseteq P$.

(d) Calcolare $\sqrt{I}$ quando $A = \mathbb{Z}$ e $I = (72)$.

Soluzione:

Risposta: (d) $\sqrt{I} =$

Esercizio 4. Sia M in gruppo abeliano generato da tre elementi x, y, z, soggetti alle relazioni

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 3z = 0. \end{cases}$$

Descrivere M come somma diretta di gruppi ciclici.

Soluzione:

Risposta: $M \simeq$ $\boxed{}$

Esercizio 5. Sia $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ il campo generato su $\mathbb{Q}$ dalle cinque radici del polinomio $p(x) := x^5 - 9x + 3$.

(a) Determinare se $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sia irriducibile.

(b) Determinare se $\mathbb{K}$ sia contenuto in $\mathbb{R}$.

(c) Determinare il gruppo di Galois di $\mathbb{K}$ su $\mathbb{Q}$.

(d) Determinare se $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ sia un'estensione di Galois su $\mathbb{Q}$.

(e) Calcolare il grado di $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$.

Soluzione:

Risposta:

(a) $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile? **SI** \ **NO**. (b) $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$? **SI** \ **NO**. (c) $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) \simeq \boxed{}$

(d) $\mathbb{K} \cap \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Q}$ è di Galois? **SI** \ **NO**. (e) $\big[(\mathbb{K} \cap \mathbb{R}) : \mathbb{Q}\big] = \boxed{}$

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia

Foglio per la brutta copia