

Algebra I - Esercitazione

03/05/2023

Esercizio 1. Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni alle congruenze

$$\begin{cases} 3943^{7134}x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 126x - 6 \equiv 0 \pmod{44}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

◇ $2x^2 - 5x + 2$;

◇ $2x^3 - 5x + 2$;

◇ $x^3 - 2x - 4$;

◇ $2x^4 - 4x^2 + 2$;

◇ $x^4 - x^2 - 2$.

Esercizio 3. Sia $g = x^3 + x - 1 \in A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ e sia J l'ideale generato da g . Dimostrare che

◇ A/J non è un dominio d'integrità;

◇ $x^2 - x - 1 + J$ è un divisore dello zero in A/J .

Esercizio 4. Sia p un numero primo. Determinare il numero dei p -Sylow del gruppo simmetrico S_p ed il numero di elementi di ordine p .

Esercizio 5. Quanti sono gli elementi di ordine 5 nel gruppo degli invertibili di $\mathbb{Z}/44\mathbb{Z}$?

Esercizio 6. Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[i]$ contenenti $12 + 6i$.

Esercizio 7. Sia G un gruppo e sia φ un automorfismo di G . Dimostrare che $\varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$. In generale vale l'uguaglianza? Trovare un controesempio se la risposta è no.

Esercizio 8. Sia A un anello commutativo unitario e sia \mathfrak{m} un suo ideale massimale. Trovare una struttura di spazio vettoriale per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

