

Algebra I - Esercitazione

10/05/2023

Esercizio 1. Dimostrare che i seguenti anelli non sono noetheriani, e determinare quali sono domini d'integrit :

- ◊ l'anello dei polinomi in un insieme numerabile di variabili $\mathbb{K}[t_1, t_2, t_3, \dots]$;
- ◊ l'anello delle funzioni reali continue su un intervallo chiuso proprio $C[a, b]$;
- ◊ l'anello degli interi algebrici complessi $O_{\mathbb{C}}$.

Esercizio 2. Dimostrare che se un anello R verifica la condizione della catena ascendente sugli ideali finitamente generati, allora   noetheriano.

Esercizio 3. Siano

$$f: N \longrightarrow M \qquad g: N \longrightarrow M$$

rispettivamente un morfismo suriettivo e un morfismo iniettivo di R -moduli, dove R   un anello commutativo unitario. Dimostrare che se N   un modulo noetheriano allora f   un isomorfismo.

Esercizio 4. Sia $g = x^3 + x - 1 \in A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ e sia J l'ideale generato da g . Dimostrare che

- ◊ A/J non   un dominio d'integrit ;
- ◊ $x^2 - x - 1 + J$   un divisore dello zero in A/J .

Esercizio 5. Dimostrare che un gruppo di ordine 30 non   semplice.

Esercizio 6. Sia G un gruppo finito e sia X un insieme finito su cui G agisce. Denotiamo con $\mathbb{C}X$ lo spazio vettoriale formale complesso sulla base X , ovvero lo spazio delle combinazioni lineari formali degli elementi di X a coefficienti complessi. Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}X$ fissato (non necessariamente puntualmente) dall'azione di G ? Se G agisce transitivamente la risposta cambia?

Esercizio 7. Sia p un numero primo. Determinare il numero dei p -Sylow del gruppo simmetrico S_p ed il numero di elementi di ordine p .