Algebra I - Esercitazione

19/04/2023

Esercizio 1. Dato il polinomio $f = x^4 - x^2 - 12 \in \mathbb{Q}[x]$ e denotato con J l'ideale generato da f in $\mathbb{Q}[x]$, descrivere gli ideali dell'anello $\mathbb{Q}[x]/J$ e dire quali tra di essi sono massimali.

Esercizio 2. Sia p un numero primo. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, il polinomio $x^n - p$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 3. Dimostrare che il nucleo dell'omomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

è un ideale principale, e trovare un generatore per tale ideale.

Esercizio 4. Siano A un anello commutativo unitario, a un suo elemento ed I un suo ideale. Poniamo

$$\mathcal{I} \coloneqq \{f \mid f \in A[x] \text{ t.c. } f(a) \in I\}$$

Provare che:

1. $\mathcal{I}$ è un ideale di $A[x]$;
2. $\mathcal{I}$ è primo se e solo se lo è I.

Esercizio 5. Dimostrare che esiste un unico gruppo di ordine 33, a meno di isomorfismo. Fare lo stesso con 77.

Esercizio 6. Determinare il reticolo dei sottogruppi di Q_8, il gruppo delle unità dei quaternioni, e di D_4, il gruppo delle simmetrie del quadrato.

Esercizio 7. Descrivere tutti i morfismi di gruppi da C_6 in S_3, e viceversa.

Esercizio 8. Sia G il gruppo delle affinità della retta reale

$$\{ax + c \mid a \in \mathbb{R}^*,\ c \in \mathbb{R}\}$$

con prodotto uguale alla composizione di applicazioni. Verificare che G è un sottogruppo del gruppo di tutte le bigezioni di R. È commutativo?
Dimostrare che il sottoinsieme delle traslazioni $T = \{x + c,\ c \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale e descrivere il quoziente G/T.
Dimostrare che G è isomorfo ad un sottogruppo delle matrici 2×2 triangolari superiori.