ALGEBRA I: ESERCIZI SULLE CARDINALITÀ

Usate liberamente l'assioma della scelta e i risultati che abbiamo dimostrato usandolo.

(1) Siano $f : X \to Y, g : Y \to Z$ applicazioni. Mostrare che
- se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva;
- se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva;
- se $g \circ f$ è invertibile, allora f è iniettiva e g è suriettiva.

(2) Dare un esempio di applicazioni $f : X \to X, g : X \to X$ non invertibili tali che $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(3) Mostrare che ogni applicazione $f : X \to Y$ si può esprimere nella forma $f = g \circ h$ dove $h : X \to Z$ è suriettiva e $g : Z \to Y$ è iniettiva.

(4) Mostrare che ogni applicazione $f : X \to Y$ si può esprimere nella forma $f = g \circ h$ dove $h : X \to Z$ è iniettiva e $g : Z \to Y$ è suriettiva.

(5) Mostrare che se X è un insieme infinito, allora l'insieme $P^{\mathit{fin}}(X)$ dei sottoinsiemi finiti di X ha la stessa cardinalità di X.

(6) Mostrare che se V è un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale di dimensione finita, allora V è numerabile.

(7) Mostrare che se V è un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale con una base numerabile, alloa V è numerabile.

(8) Mostare che se K è un campo infinito e V è un K-spazio vettoriale con una base al più numerabile, allora $|V| = |K|$.

(9) Sia K un campo infinito, e V uno spazio vettoriale dotato di una base infinita B. Mostrare che $|V| = \max(|K|, |B|)$.

(10) X^Y indica l'insieme di tutte le applicazioni $Y \to X$. Calcolare $|X^Y|$ se X, Y sono insiemi finiti e $|X| = a$ e $|Y| = n$.

(11) Fornire una corrispondenza biunivoca tra $X^{Y \cup Z}$ e $X^Y \times X^Z$ quando Y, Z sono insiemi disgiunti.

(12) Fornire una corrispondenza biunivoca tra $(X^Y)^Z$ e $X^{Y \times Z}$.

(13) Fornire una corrispondenza biunivoca tra $\{0, 1\}^X$ e $P(X)$.[1]

(14) Mostrare che se $|A| = |X|$ e $|B| = |Y|$ allora $|A^B| = |X^Y|$.

(15) Il grafico di un'applicazione $f : X \to Y$ è il sottoinsieme $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y = f(x)\} \subset X \times Y$. Mostrare che l'applicazione Γ definita da

$$Y^X \ni f \mapsto \Gamma_f \in P(X \times Y)$$

è iniettiva, e concludere che $|Y^X| \leq |P(X \times Y)|$.

(16) Mostrare che se X è un insieme infinito e $1 < |Y| \leq |X|$, allora $|Y^X| = |P(X)|$.

(17) Mostrare che se X è un insieme infinito e $1 < |Y| \leq |P(X)|$, allora $|Y^X| = |P(X)|$.

(18) Esibire un esempio in cui X è infinito e $|Y^X|$ è strettamente superiore a $|P(X)|$.

(19) Sia $C^0 \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Mostrare che $|C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})| < |\mathbb{R}^\mathbb{R}|$.

(20) Sia S_X l'insieme delle applicazioni invertibili da X in X. Mostrare che se X è infinito allora $|S_X| = |P(X)|$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it

[1] In molte versioni della teoria assiomatica degli insiemi, si pone $0 := \emptyset$ e $n + 1 := n \cup \{n\}$. In questo modo, si ha $2 = \{0, 1\}$ e si scrive quindi 2^X invece di $\{0, 1\}^X$.