ALGEBRA I: ESERCIZI SUI GRUPPI

(1) Supponiamo che in un gruppo valga $xyz = 1$. È vero che $yzx = 1$? È vero che $yxz = 1$?

(2) Sia G un gruppo con prodotto $\cdot$. Definiamo il *gruppo opposto* G° come l'insieme G dotato del prodotto opposto $a \circ b = b \cdot a$.
- Dimostrare che G° è un gruppo.
- Trovare un isomorfismo tra G e G°.

(3) Siano a, b elementi di un gruppo. Assumendo che a ha ordine 5 e $a^3 b = ba^3$, mostrare che $ab = ba$.

(4)
- Se un elemento $x \in G$ ha ordine rs, qual è l'ordine di x^r?
- Se un elemento $x \in G$ ha ordine n, qual è l'ordine di x^r?

(5) Dimostrare che se ogni elemento $x \in G$ diverso dall'unità ha ordine 2, allora G è abeliano.

(6) Determinare il gruppo degli automorfismi (= isomorfismi $\varphi : G \to G$) dei seguenti gruppi:
- $(\mathbb{Z}, +)$;
- gruppo ciclico di ordine 10;
- S_3.

(7) Descrivere tutti gli omomorfismi di gruppo $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, dicendo quali sono iniettivi, quali suriettivi e quali isomorfismi.

(8) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, data da $f(x) = e^{ix}$. Mostrare che f è un omomorfismo di gruppi. Determinarne nucleo e immagine.

(9) Si consideri il gruppo additivo $\mathbb{R}^n$. Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ il sottogruppo che consiste delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogeneo $AX = 0$ (dove A è una matrice $m \times n$ fissata). Mostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo $AX = b$ è una classe laterale di W.

(10)
- Mostrare che un sottogruppo $H \subset G$ di indice 2 (ovvero t.c. $|G/H| = 2$) è necessariamente normale.
- Far vedere con un esempio che un sottogruppo di indice 3 non è necessariamente normale.

(11) Siano a, b elementi di un gruppo G. Mostrare che ab e ba hanno lo stesso ordine.

(12) Mostrare con un esempio che il prodotto di elementi di ordine finito in un gruppo può non avere ordine finito. Che succede se il gruppo è abeliano?

(13) Mostrare che l'intersezione $H \cap K$ di sottogruppi di un gruppo G è un sottogruppo di H e che se K è un sottogruppo normale di G, allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di H.

(14) Sia H il sottogruppo ciclico, generato dalla permutazione $(1\,2\,3)$, del gruppo alterno A_4. Elencare le classi laterali sinistre e destre di H esplicitamente.

(15) Un gruppo di ordine 35 contiene necessariamente un elemento di ordine 5? E di ordine 7?

(16) Siano H, K sottogruppi di indice finito di G. Dimostrare che anche $H \cap K$ ha indice finito in G. Mostrare con un esempio che l'indice di $H \cap K$ in H non divide necessariamente l'indice di K in G.

(17) Sia G un gruppo di ordine pari. Dimostrare che esiste un elemento $a \in G$ di ordine 2.

(18) Sia G un insieme con un prodotto associativo $\cdot$ che soddisfa le seguenti condizioni:
- Esiste $e \in G$ tale che $a \cdot e = a$ per ogni $a \in G$.
- Dato $a \in G$, esiste $y(a) \in G$ tale che $a \cdot y(a) = e$.

Dimostrare che $(G, \cdot)$ è gruppo.

(19) Sia G un insieme con un prodotto associativo $\cdot$ che soddisfa le seguenti condizioni:
- Esiste $e \in G$ tale che $a \cdot e = a$ per ogni $a \in G$.
- Dato $a \in G$, esiste $y(a) \in G$ tale che $y(a) \cdot a = e$.

Far vedere con un esempio che $(G, \cdot)$ non è necessariamente un gruppo.

(20) Sia G un insieme finito con un prodotto associativo $\cdot$ per cui valgono entrambe le leggi di cancellazione $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ e $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$. Dimostrare che $(G, \cdot)$ è gruppo.

Far vedere con un esempio che se vale una sola legge di cancellazione G non è necessariamente un gruppo. Mostrare con un esempio che, se G non è finito, la validità di entrambe le leggi di cancellazione non basta a garantire che G sia un gruppo.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it