ALGEBRA I: ESERCIZI SUI GRUPPI

(1) Elencare tutti i sottogruppi del gruppo $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ e specificare quali siano normali.
(2) Individuare le classi di coniugio nel gruppo diedrale D_6 di ordine 12.
(3) Individuare le classi di coniugio nel gruppo diedrale D_7 di ordine 14.
(4) Descrivere le classi di coniugio nei gruppi S_6 e A_6.
(5) Sia $U < \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ il sottogruppo delle matrici 3×3 triangolari superiori unipotenti (cioè con tutti 1 sulla diagonale). Calcolare l'ordine di U, individuarne il centro e mostrare che ogni suo elemento diverso dall'identità ha ordine 3.
(6) Se $V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, mostrare che $V \lhd S_4$ e spiegare perché il quoziente S_4/V sia isomorfo a S_3.
(7) Mostrare che $(\mathbb{Z}/(4), +)$ non è prodotto semidiretto di suoi sottogruppi propri.
(8) Mostrare che A_4 non possiede sottogruppi di ordine 6.
(9) Esibire tutti i 2-Sylow di S_4.
(10) Mostrare che, in un gruppo di ordine 12, almeno un sottogruppo di Sylow è normale.
(11) Se $|G| = m, |H| = n$ e $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$, mostrare che l'unico omomorfismo $f : G \to H$ manda ogni elemento di G nell'identità di H.
(12) Descrivere tutti gli omomorfismi $A_4 \to D_4$.
(13) Descrivere tutti gli omomorfismi $A_4 \to S_3$.
(14) Un sottogruppo $H < G$ si dice *caratteristico* quando $\phi(H) = H$ per ogni scelta di $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$.
  - Mostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale.
  - Dare un esempio di un sottogruppo normale che non sia caratteristico.
  - Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G.
  - Mostrare che un p-sottogruppo di Sylow è normale se e solo se è caratteristico.

(15) Mostrare che il prodotto semidiretto $N \rtimes_\phi H$ è abeliano se e solo se N, H sono abeliani e $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ manda ogni elemento di H in id_N.
(16) Mostrare che se $p < q$ sono primi e p non divide $q-1$ allora un gruppo di ordine pq è necessariamente ciclico.
(17) Descrivere, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi di ordine 12.
(18) Descrivere, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi di ordine 18.
(19) Costruire, come prodotto semidiretto, un gruppo non abeliano di ordine 39.
(20) Nel prodotto semidiretto $\overline{G} = N \rtimes_\phi H$ consideriamo i sottoinsiemi $\overline{H} = \{(1, h) \mid h \in H\}$ e $\overline{N} = \{(n, 1) \mid n \in N\}$. Mostrare che:
  - $\overline{H}$ e $\overline{N}$ sono sottogruppi di $\overline{G}$, isomorfi a H, N rispettivamente;
  - $\overline{N}$ è un sottogruppo normale di $\overline{G}$;
  - $\overline{N} \cap \overline{H} = \{(1, 1)\}$;
  - $\overline{N} \cdot \overline{H} = \overline{G}$;
  - $(1, h)(n, 1)(1, h)^{-1} = (\phi_h(n), 1)$.

  In altre parole, $\overline{G}$ è prodotto semidiretto dei suoi sottogruppi $\overline{N}, \overline{H}$ e ϕ descrive il modo in cui gli elementi di $\overline{H}$ coniugano quelli di $\overline{N}$.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it