**ALGEBRA LINEARE 2019-20**
**DIARIO DELLE LEZIONI**

## 1. Lunedì 23 settembre 2019

Informazioni organizzative.

Chiacchiere sul concetto di retta e coordinata. Somma e prodotto di coordinate. Motivazione del concetto di campo. Definizione formale di campo. Gruppi abeliani, anelli, anelli commutativi, anelli con unità (cenni). Esempi di campo: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p$ quando $p$ è primo. Brevi cenni sulla caratteristica di un campo.

Preliminari ad un nuovo esempio di campo: $\sqrt{2}$ è irrazionale; *razionalizzazione* di frazioni con $\sqrt{2}$ al denominatore.

## 2. Martedì 24 settembre 2019

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Numeri complessi: definizione delle operazioni. L'insieme dei numeri complessi è un campo.

Interpretazione geometrica della somma attraverso il piano di Argand-Gauss. Coniugazione complessa; parte reale e immaginaria; norma complessa e sua moltiplicatività.

Forma polare di numeri complessi. Norma e argomento. Il prodotto di numeri complessi di norma $1$ ha ancora norma $1$. L'argomento del prodotto di numeri complessi è (a meno di multipli di $2\pi$) la somma degli argomenti dei fattori. Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi.

Risoluzione di $z^3 = 1$ in due modi diversi. Risoluzione di $z^5 = 1$ e $z^2 = i$. Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ammette almeno una radice complessa (cenni).

## 3. Giovedì 26 settembre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 4. Lunedì 30 settembre 2019

Le traslazioni del piano e le loro proprietà algebriche.

Il concetto di spazio vettoriale. Definizione formale. Primi esempi: $\{0\}$ e $\mathbb{K}$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{\times n}$ dei vettori riga e quello $\mathbb{K}^n$ dei vettori colonna. $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; più in generale, se $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ sono campi, $\mathbb{F}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

L'insieme $\mathbb{K}^S$ delle applicazioni da $S$ in $\mathbb{K}$, con le usuali operazioni, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; esempio quando $S = [0, 1]$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Struttura di spazio vettoriale sull'insieme $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi in $x$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

## 5. Martedì 1 ottobre 2019

Prodotto cartesiano di spazi vettoriali (somma diretta).

Sottospazi vettoriali: definizione ed esempi. Iperpiani in $K^n$. Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Intersezione (qualunque) di sottospazi vettoriali. L'unione di sottospazi vettoriali non è necessariamente un sottospazio vettoriale. Somma di sottospazi vettoriali. Somma diretta di un numero finito di sottospazi vettoriali; nel caso di due sottospazi vettoriali, la somma è diretta se e solo se l'intersezione è $(0)$.

Combinazioni lineari e insiemi di generatori. Spazi vettoriali finitamente e infinitamente generati.

## 6. Giovedì 3 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 7. Lunedì 7 ottobre 2019

Breve riassunto sulle combinazioni lineari. Il sottospazio vettoriale generato da un insieme di vettori è il più piccolo sottospazio vettoriale che li contenga. Combinazioni lineari di combinazioni lineari sono combinazioni lineari. $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$; se $A \subset B \subset V$ e $A$ genera $V$, allora $B$ genera $V$.

$\mathbb{K}^n$ è finitamente generato come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale; $\mathbb{K}[x]$ invece non lo è. $\mathrm{span}$ di un insieme infinito (cenni). I vettori $(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$ generato $\mathbb{R}^3$.

Dipendenza e indipendenza lineare. Definizione ed esempi. La lineare indipendenza passa ai sottoinsiemi. Vettori linearmente indipendenti sono distinti e non nulli. L'insieme vuoto è linearmente indipendente. Un singolo vettore è linearmente indipendente se e solo se è non nullo. Chiacchiere su lineare indipendenza e sistemi di riferimento (basi).

## 8. Martedì 8 ottobre 2019

Ancora sulla dipendenza lineare. Due elementi sono linearmente indipendenti se e solo se non sono uno multiplo dell'altro; $n$ elementi sono linearmente indipendenti se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. Definizione ricorsiva dell'indipendenza lineare: $n$ elementi sono linearmente indipendenti se i primi $n-1$ sono linearmente indipendenti e l'$n$-esimo non è combinazione lineare dei precedenti.

Il teorema di scambio. Applicazioni: se $V$ ammette $m$ generatori lineari, un insieme di vettori di $V$ linearmente indipendenti non può contenerne più di $m$. Uno spazio vettoriale ha dimensione finita se e solo se possiede sottoinsiemi linearmente indipendenti di cardinalità arbitrariamente alta. Applicazioni: $\mathbb{K}[x]$ ha dimensione infinita come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; $\mathbb{R}$ ha dimensione infinita come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Esistenza di basi in spazi vettoriali finitamente generati: da ogni insieme di generatori si estrae una base; ogni insieme linearmente indipendente si completa ad una base; ciascuna base di uno spazio vettoriale finitamente generato possiede lo stesso numero di elementi. Le basi sono gli insiemi minimali di generatori, nonché gli insiemi linearmente indipendenti massimali. Dimensione di uno spazio vettoriale.

In uno spazio vettoriale di dimensione $n$, meno di $n$ vettori non generano, e più di $n$ vettori sono linearmente dipendenti.

## 9. Giovedì 10 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 10. Lunedì 14 ottobre 2019

Riepilogo sulle basi. La dimensione è monotona per inclusione: se $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale, e $V$ ha dimensione finita, allora anche $U$ ha dimensione finita e $\dim U \leq \dim V$. Inoltre, $\dim U = \dim V$ esattamente quando $U = V$. Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: versione rigorosa.

Se $\dim V = 0$, allora $V = \{0\}$. $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$. $\mathbb{C}$ ha dimensione 1 come spazio vettoriale complesso, 2 come spazio vettoriale reale e infinita come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Lo spazio dei polinomi di grado $\leq 3$ ha dimensione $4$.

Sottospazi complementari in uno spazio vettoriale. Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale di dimensione finita possiede un complementare (metà dimostrazione).

## 11. Martedì 15 ottobre 2019

Fine della dimostrazione dell'esistenza di un complementare di ogni sottospazio. Formula di Grassmann. Applicazione alla geometria dei piani in $\mathbb{R}^3$. Dimensione di sottospazi complementari. Coordinate di un vettore rispetto ad una base: sono ben definite; l'applicazione che associa a ciascun vettore le sue coordinate è invertibile.

Applicazioni lineari. Definizione e molti esempi. Somma, multiplo e composizione di applicazioni lineari sono lineari. Un'applicazione lineare manda 0 in 0 e combinazioni lineari in combinazioni lineari. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare: sono sottospazi vettoriali. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se ha nucleo nullo.

## 12. Giovedì 17 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 13. Lunedì 21 ottobre 2019

Restrizione di un'applicazione lineare e sua immagine. L'inversa di un'applicazione lineare invertibile è ancora lineare. Chiacchiere sul concetto di isomorfismo di spazi vettoriali e sugli spazi vettoriali isomorfi.

Un'applicazione lineare suriettiva manda generatori in generatori; un'applicazione lineare iniettiva manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti; un'applicazione lineare invertibile manda basi in basi. Spazi vettoriali isomorfi hanno la stessa dimensione. Se un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva, allora $\dim V \leq \dim W$; se è suriettiva, allora $\dim V \geq \dim W$; se è invertibile, allora $\dim V = \dim W$. Teorema del rango: se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f$. Interpretazione geometrica.

Applicazioni: un'applicazione lineare $V \to V$, quando $V$ ha dimensione finita, è iniettiva se e solo se è suriettia se e solo se è invertibile.

## 14. Martedì 22 ottobre 2019

Concetto di rango e applicazioni di rango finito.

L'applicazione $\mathbb{K}^n \to V$ che manda una $n$.upla $(a_1, \ldots, a_n)$ nella corrispondente combinazione lineare di vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ fissati. E' iniettiva se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti; è suriettiva se e solo se i vettori generano $V$; è invertibile se e solo se i vettori sono una base di $V$. In quest'ultimo caso, la sua inversa è l'applicazione (lineare) che associa a ciascun elemento di $V$ le sue coordinate nella base scelta.

Se $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di $V$ e $w_1, \ldots, w_n$ sono elementi di $W$, esiste un'unica applicazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$: dimostrazione di unicità ed esistenza.

Matrici. Definizione e proprietà. Matrice nulla, matrice identità, matrice trasposta, matrici quadrate. Somma di matrici, multiplo di una matrice. Le matrici $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Struttura di spazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$. Matrice associata ad un'applicazione lineare $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$: è una matrice $n \times m$. L'applicazione che associa a ciascuna applicazione lineare $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}_m$ la corrispondente matrice $m \times n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Come si usa una matrice? Calcolo di $T(a_1, \ldots, a_n)$ mediante l'utilizzo della matrice associata a $T$. La composizione di applicazioni lineari è associativa. Matrice associata alla composizione di applicazioni lineari: il prodotto righe per colonne. Associatività del prodotto righe per colonne; distributività rispetto alla somma. Il prodotto righe per colonne non è commutativo: controesempi.

Matrice associata ad una rotazione nel piano. Formule di somma per seno e coseno.

## 15. Giovedì 24 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 16. Lunedì 28 ottobre 2019

Richiami sulla corrispondenza tra applicazioni lineari e matrici; dimensione di $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$. Come si verifica l'iniettività e la suriettività di un'applicazione lineare $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ attraverso la matrice? Il nucleo di un'applicazione lineare $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ si calcola risolvendo un sistema omogeneo di equazioni lineari. L'immagine di $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle colonne di $A$.

Esempi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Manipolazioni del procedimento di eliminazione di Gauss-Jordan. Matrici a scala e riduzione di matrici.

## 17. Martedì 29 ottobre 2019

Rango di matrici. Se $A$ è una matrice $n \times m$, il rango di $A$ è definito come il rango dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ associata ad $A$: coincide con la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle colonne di $A$.

Definizione di matrice a scala e pivot. Le righe non nulle di una matrice a scala sono linearmente indipedenti. Le colonne di una matrice a scala che contengono un pivot sono linearmente indipendenti e generano il sottospazio vettoriale generato dalle colonne della matrice. Se $S$ è una matrice a scala, il rango di $S$ coincide con il numero dei pivot, ed è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle righe di $S$.

Richiami: le manipolazioni del procedimento di eliminazione di Gauss-Jordan. Se la matrice $B$ si ottiene dalla matrice $A$ tramite tali manipolazioni, allora $\ker A = \ker B$; di conseguenza, $A$ e $B$ hanno lo stesso rango. Descrizione algoritmica del procedimento di eliminazione: si arriva ad una matrice a scala per costruzione. Il rango di una matrice $A$ coincide con quello della matrice a scala $S$ che si ottiene al termine del procedimento di eliminazione, cioè al numero dei pivot di $S$.

Il sottospazio vettoriale generato dalle righe di una matrice non è modificato dalle manipolazioni del procedimento di eliminazione; di conseguenza, le righe non nulle della matrice a scala $S$ che si ottiene a partire dalla matrice $A$ costituiscono una base del sottospazio vettoriale generato dalle righe di $A$. Le dimensioni del sottospazio vettoriale generato dalle righe di $A$ e del sottospazio vettoriale generato dalle colonne di una matrice $A$ coincidono e sono uguali al rango di $A$. Risoluzione di un esercizio in tre modi diversi: calcolo della dimensione di un sottospazio, calcolo di una base del sottospazio, estrazione di una base da un insieme di generatori del sottospazio.

Il teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione esplicita di un sistema di equazioni lineari con il procedimento di eliminazione. Le soluzioni sono parametrizzate (linearmente) da $m - r$ parametri, dove $m$ è il numero di incognite e $r$ è il rango della matrice dei coefficienti del sistema. Quando il sistema è omogeneo, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale, e la sua dimensione è proprio $m - r$.

## 18. Giovedì 31 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 19. Lunedì 4 novembre 2019

Ancora su equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi vettoriali: come ottenere equazioni cartesiane minimali; come ottenere una parametrizzazione minimale; come calcolare somma e intersezione di sottospazi.

Matrice che rappresenta una applicazione lineare rispetto a basi date (in partenza e in arrivo), esempi. Matrice che rappresenta la composizione di due applicazioni lineari.

## 20. Martedì 5 novembre 2019

Esercitazione in classe.

## 21. Lunedì 11 novembre 2019

Matrici di cambiamento di coordinate. Correzione di esercizi.

## 22. Martedì 12 novembre 2019

Dualità di spazi vettoriali. Spazio vettoriale duale. Basi duali. Annullatori di sottospazi vettoriali. L'immersione canonica nel biduale: nel caso di dimensione finita è un isomorfismo. Trasposta di un'applicazione lineare e sua matrice nelle basi duali. $(\mathrm{Im}\, T)^\circ = \ker T^*$, $(\ker T)^\circ = \mathrm{Im}\, T^*$. Chiacchiere sui solidi platonici e sulla dualità.

## 23. Giovedì 14 novembre 2019

Com'è fatta un'applicazione lineare $V \to \mathbb{R}$ che non assume valori negativi?

Calcolo dell'area di un parallelogramma nel piano reale. Determinante di matrici $2 \times 2$ e proprietà di bilinearità e alternanza. Dalle proprietà di bilinearità e alternanza si ricava facilmente l'espressione del determinante. Proprietà attese dal determinante di matrici $n \times n$: multilinearità nelle colonne, alternanza, normalizzazione.

Anticipazioni: le proprietà di multilinearità, alternanza e normalizzazione individuano un'unica funzione; definizione ricorsiva del determinante.

Proprietà di una funzione $d : \mathrm{Mat}_{n\ timesn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$: scambiando tra loro due colonne della matrice argomento, $d$ cambia segno; se una colonna dell'argomento è nulla, $d$ vale $0$; se le colonne dell'argomento sono linearmente dipendenti, $d$ vale $0$. Sommando ad una colonna una combinazione lineare delle altre colonne non si altera il valore del determinante.

## 24. Lunedì 18 novembre 2019

Proprietà del determinante, come da definizione ricorsiva: è multilineare e alternante nelle colonne. Sulle matrici triangolari è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale; di conseguenza, vale $1$ sulla matrice identità.

Permutazioni: $\mathrm{S}_n$ possiede $n!$ elementi; sua struttura di gruppo (non abeliano). Trasposizioni: ogni permutazione è prodotto di trasposizioni. Segno di permutazioni: $\mathrm{sgn}(\sigma) = |\,\mathrm{Id}^\sigma\,|$. Le trasposizioni hanno segno $-1$; $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$; $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau), \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Espressione del determinante per mezzo di una somma sulle permutazioni (da completare).

## 25. Martedì 19 novembre 2019

Dimostrazione della formula

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\ a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Esempi. Se $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è multilineare e alternante sulle colonne della matrice argomento, allora $d(A) = |A| \cdot d(I)$.

$|A| = |A^T|$. La funzione determinante è multilineare e alternante sulle righe della matrice argomento: tutte le proprietà già dimostrate rispetto alle colonne sono valide anche rispetto alle righe. Calcolo del determinante di una matrice per mezzo delle manipolazioni dell'eliminazione di Gauss.

Sviluppi di Laplace. Metodo di Cramer. Se le colonne di una matrice quadrata $A$ sono linearmente indipendenti, allora $|A| \neq 0$: prima dimostrazione. Seconda dimostrazione per mezzo del Teorema di Binet: $|AB| = |A||B|$; interpretazione geometrica. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$. Calcolo dell'inversa di una matrice invertibile con l'uso dei determinanti.

## 26. Giovedì 21 novembre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 27. Lunedì 25 novembre 2019

Calcolo dell'inversa di una matrice con il metodo dei cofattori. Un esempio $3 \times 3$.

Struttura delle fibre di un'applicazione lineare. Generalità su controimmagine di un elemento; $f^{-1}(y)$ è vuoto quando $y \notin \mathrm{Im}\, f$; $\ker f = f^{-1}(0)$.

Se $F : V \to W$ è lineare e $F(v) = w \in \mathrm{Im}\, F$, allora $F^{-1}(w) = v + \ker F$. Interpretazione geometrica. Tre esempi: soluzioni di un sistema (non omogeneo) di equazioni lineari; primitive di una funzione e integrale indefinito; risoluzione di una semplice equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Sottospazi affini di uno spazio vettoriale e loro giacitura. Se $X = v + U$ è uno spazio affine di giacitura $U$, $U$ è determinato da $X$, mentre $v$ no. Un esempio in $\mathbb{R}^2$. Somma di sottospazi affini con identica giacitura: è nuovamente un sottospazio affine con la stessa giacitura. Struttura di spazio vettoriale sull'insieme $V/U$ dei sottospazi affini della forma $v + U$ (cenni).

## 28. Martedì 26 novembre 2019

Spazio vettoriale quoziente $V/U$: definizione. La proiezione canonica $\pi : V \to V/U$. $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Omomorfismi, endomorfismi, isomorfismi, automorfismi. Due esempi per motivare la diagonalizzazione di endomorfismi: descrizione degli endomorfismi del piano reale; struttura delle successioni di Fibonacci (generalizzate). Preparazione alla diagonalizzazione: autovalori e autovettori di endomorfismi, autospazi, polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$: è un polinomio di grado $n$. Calcolo dei primi due coefficienti del polinomio caratteristico. Vari esempi.

## 29. Giovedì 28 novembre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 30. Lunedì 2 dicembre 2019

Calcolo del termine noto del polinomio caratteristico di una matrice. Matrici simili: la similitudine è una relazione di equivalenza. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi stessa traccia e determinante. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ e una seconda dimostrazione che matrici simili hanno la stessa traccia. Polinomio caratteristico di un endomorfismo.

Diagonalizzazione di un endomorfismo. Basi diagonalizzanti. Una base diagonalizza un endomorfismo se e solo se è composta da autovettori dell'endomorfismo. Un esempio ovvio: la base canonica diagonalizza $L_A$ se $A$ è una matrice diagonale.

## 31. Martedì 3 dicembre 2019

Richiami dalla lezione precedente: polinomio caratteristico di endomorfismi e matrici; autovalori e autovettori di endomorfismi e matrici; due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo in basi diverse; una matrice è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale.

Tre esempi di endomorfismi di $\mathbb{R}^2$: uno diagonalizzabile; uno non diagonalizzabile; uno non diagonalizzabile ma con complessificazione diagonalizzabile. Molteplicità algebrica e geometrica di autovalori. Ogni autovalore $\lambda$ soddisfa $1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)$. Le radici di un polinomio di grado $d$, se contate ciascuna con la sua molteplicità, sono al più $d$. Se $\dim V = n$ e $T \in \mathrm{End}(V)$, allora la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $T$ è $\leq n$, ed è $n$ se il campo degli scalari è algebricamente chiuso; la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di $T$ è $\leq n$.

La somma di autospazi di un endomorfismo è sempre diretta. Se $\dim V < +\infty$ e $T \in \mathrm{End}(V)$ allora $T$ è diagonalizzabile se e solo se $V$ è somma diretta degli autospazi di $T$. Conseguenza: $T$ è diagonalizzabile se e solo se: le molteplicità geometrica e algebrica di ciascun autovalore coincidono; il polinomio caratteristico di $T$ si spezza nel prodotto di fattori di primo grado. Riesame degli esempi precedenti.

Risoluzione dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 4y = 0$ attraverso la diagonalizzazione della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

## 32. Giovedì 5 dicembre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 33. Lunedì 9 dicembre 2019

Richiami sulla diagonalizzazione.

Un'esempio dell'enunciato del teorema di Cayley-Hamilton. Alcune premesse: le matrici a blocchi *si moltiplicano a blocchi*; valutazione di $p(x) \in K[x]$ in una matrice quadrata/un endomorfismo.

Se $K$ è algebricamente chiuso (ad esempio, $K = \mathbb{C}$) e $V$ è uno spazio vettoriale su $K$ di dimensione finita, ogni endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$ possiede un autovettore. Di conseguenza, scegliendo opportunamente una base $B$ di $V$, la matrice associata a $T$ è a blocchi $(1, n-1)$. Dimostrazione del teorema di Cayley-Hamilton.

Osservazioni: ogni campo si immerge in un campo algebricamente chiuso; esistono dimostrazioni (lievemente più fastidiose) del Teorema di Cayley-Hamilton che non fanno uso della chiusura algebrica; il Teorema di Cayley-Hamilton vale su anelli commutativi con unità.

Polinomio minimo di endomorfismi/matrici quadrate: tre tentativi di definizione. Il polinomio minimo di $T$ è il polinomio monico di grado minimo che annulla $T$; unicità del polinomio minimo.

## 34. Martedì 10 dicembre 2019

Il polinomio minimo di $T$ divide tutti i polinomi che annullano $T$. $\lambda \in K$ è autovalore di $T$ se e solo se è radice del polinomio minimo di $T$. Se $T \in \mathrm{End}(V)$ è diagonalizzabile, allora il polinomio minimo di $T$ è prodotto di polinomi monici di primo grado distinti. Vale anche il viceversa.

Endomorfismi triangolabili: affinché $T \in \mathrm{End}(V), \dim V < +\infty$, sia triangolabile il polinomio caratteristico di $T$ deve essere prodotto di polinomi di primo grado. Viceversa, se $p_T(x)$ è prodotto di polinomi di primo grado, allora $T$ è triangolabile: idea (imprecisa) della dimostrazione.

Sottospazi $U \subset V$ invarianti per l'azione di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$; applicazione lineare $V/U \to V/U$ indotta da $T \in \mathrm{End}(V)$: è ben definita.

## 35. Giovedì 12 dicembre 2019

Risoluzione di esercizi.

## 36. Lunedì 16 dicembre 2019

Caratterizzazione delle basi di $V/U$ quando $V$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $U$ è un suo sottospazio vettoriale. Se il polinomio caratteristico di $T$ è prodotto di fattori di primo grado, allora $V$ ammette una base in cui la matrice associata a $T$ è triangolare: dimostrazione corretta. Triangolabilità di endomorfismi complessi.

Forma canonica di Jordan: enunciati. Esempi in dimensione 2 e 3. Autospazi generalizzati di un endomorfismo: definizione; sono sottospazi vettoriali; contengono gli autospazi; sono non banali solo quando corrispondono ad un autovalore.

## 37. MARTEDÌ 17 DICEMBRE 2019

Endomorfismi nilpotenti. La somma di autospazi generalizzati è diretta. Se $p_T(x)$ è prodotto di polinomi di primo grado, allora $V$ è somma diretta degli autospazi generalizzati di $T \in \mathrm{End}(V)$. Forma canonica di Jordan per endomorfismi nilpotenti. Forma canonica di Jordan per endomorfismi qualsiasi.

## 38. GIOVEDÌ 19 DICEMBRE 2019

Risoluzione di esercizi.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
*E-mail address*: dandrea@mat.uniroma1.it