SPAZI VETTORIALI E DUALITÀ

Riassumo in maniera stringata gli argomenti della lezione del 12 novembre, che erano sicuramente troppi e troppo involuti per poter essere compresi agevolmente. Potete serenamente ignorare l'ultimo paragrafo, nonché tutti le divagazioni che contengono le parole *assioma della scelta*.

1. Spazio vettoriale duale

Tutti gli spazi vettoriali di questi appunti sono definiti sullo stesso campo $\mathbf{k}$.

Definizione 1.1. Il duale dello spazio vettoriale V è lo spazio vettoriale $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{k})$.

La notazione V^* non è l'unica in uso: sono altrettanto diffuse $V\hat{}$ e V'. Gli elementi di V^* sono detti *funzionali lineari* su V. A volte è conveniente indicare $\phi(v)$ con il simbolo $\langle \phi, v \rangle$. L'applicazione $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to \mathbf{k}$ è detta *accoppiamento di dualità* ed è separatamente lineare nei due argomenti. Chiaramente, se $\phi \in V^*$ è un funzionale non nullo, allora è possibile trovare $v \in V$ tale che $\langle \phi, v \rangle \neq 0$. Il viceversa, cioè il fatto che se $v \in V$ allora è possibile trovare $\phi \in V^*$ tale che $\langle \phi, v \rangle \neq 0$, è già stato osservato a lezione quando V ha dimensione finita — posso completare il vettore non nullo v ad una base di V, e qualsiasi arbitraria scelta delle immagini degli elementi di una base si estende in modo unico ad un'applicazione lineare — mentre è meno chiaro quando V ha dimensione infinita. Essendo la dimostrazione di questo fatto abbastanza artificiale[1] , la prendiamo per buona senza dimostrarla:

Lemma 1.2. *Se V è uno spazio vettoriale e $0 \neq v \in V$ è un suo elemento non nullo, allora esiste $\phi \in V^*$ tale che $\phi(v) \neq 0$.*

Si è soliti riassumere le due proprietà appena descritte nella frase *l'accoppiamento di dualità è non degenere.*

Proposizione 1.3. *Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base B dello spazio vettoriale V, allora i funzionali $\phi^1, \ldots, \phi^n$ definiti da $\phi^i(v_j) = \delta^i_j$ costituiscono una base di V^*, detta* base duale *della base B. Di conseguenza, se V ha dimensione finita n, anche V^* ha dimensione n.*

Dimostrazione. Se $\phi \in V^*$, allora i funzionali lineari ϕ e $\phi(v_1)\phi^1 + \cdots + \phi(v_n)\phi^n$ assumono gli stessi valori sugli elementi $v_1, \ldots, v_n$; coincidendo su una base di V, sono necessariamente uguali. Questo mostra che V^* è generato da $\phi^1, \ldots, \phi^n$.

Per quanto riguarda la lineare indipendenza, la combinazione lineare $a_1\phi^1 + \cdots + a_n\phi^n$ assume sui vettori $v_1, \ldots, v_n$ i valori $a_1, \ldots, a_n$ rispettivamente. Se tale combinazione lineare calcola il funzionale nullo, allora tali valori $a_1, \ldots, a_n$ devono annullarsi tutti. □

Corollario 1.4. *Se $v_1, \ldots, v_n$ e $\phi^1, \ldots, \phi^n$ sono basi duali di V e di V^* rispettivamente, allora*

$$v = \phi^1(v)v_1 + \cdots + \phi^n(v)v_n, \qquad \phi = \phi(v_1)\phi^1 + \cdots + \phi(v_n)\phi^n,$$

per ogni scelta di $v \in V$, $\phi \in V^*$.

Dimostrazione. Nel primo caso, calcolare $\phi^i, i = 1, \ldots, n,$ su entrambi i membri e osservare che si ottiene lo stesso risultato. Nel secondo caso, calcolare entrambi i membri su $v_i, i = 1, \ldots, n,$ e osservare che si ottiene lo stesso risultato. □

2. L'immersione canonica nel biduale

Essendo il duale V^* a sua volta uno spazio vettoriale, è possibile costruirne il duale $(V^*)^*$ che è detto *biduale* di V. Ogni elemento $v \in V$ induce un funzionale lineare su V^* dato da $\phi \mapsto \phi(v)$.

Proposizione 2.1. *L'applicazione $\iota_V : V \to (V^*)^*$ data da $\iota_V(v)(\phi) := \phi(v)$ è lineare e iniettiva. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, ι_V è un isomorfismo.*

[1] In realtà la situazione è più delicata di come la presento: la dimostrazione usa il cosiddetto *assioma della scelta* e si possono avere accese discussioni se l'enunciato sia o meno equivalente a tale assioma. La negazione dell'assioma della scelta è comunque compatibile con l'esistenza di spazi vettoriali di dimensione infinita che hanno duale nullo, il che mostra che senza usarlo possono accadere cose piuttosto bizzarre.

Dimostrazione. Che $\iota_V(v)$ sia un elemento di $(V^*)^*$ lo abbiamo già detto. La linearità dell'applicazione ι_V è facile da mostrare. In effetti:

$$\iota_V(\lambda v)(\phi) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) = \lambda(\iota_V(v)(\phi)) = (\lambda\iota_V(v))(\phi)$$

e

$$\iota_V(v_1 + v_2)(\phi) = \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \iota_V(v_1)(\phi) + \iota_V(v_2)(\phi) = (\iota_V(v_1) + \iota_V(v_2))(\phi)$$

valgono per ogni scelta di $\phi \in V^*$ e da questo fatto discende la linearità di ι_V.

Per quanto riguarda l'iniettività di ι_V, è sufficiente mostrare che $\ker \iota_V = \{0\}$. Sia $v \in V$ tale che $\iota_V(v) = 0$; questo vuol dire che $\iota_V(v)(\phi) = 0$ per ogni $\phi \in V^*$, ovvero che $\phi(v) = 0$ per ogni $\phi \in V^*$. Per il Lemma 1.2, deve allora essere $v = 0$.

Quando V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, ι_V è un'applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali della stessa dimensione, ed è quindi un isomorfismo. □

Quando V ha dimensione infinita, ι_V non è mai suriettiva. Più precisamente, quando V ha dimensione infinita, V^* ha dimensione strettamente superiore[2].

3. Annullatori di sottospazi vettoriali

Definizione 3.1. Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. L'annullatore di U è il sottospazio vettoriale di V^* dato da

$$U^\circ = \{\phi \in V^* \mid \phi(u) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}.$$

Lemma 3.2. *Se U_1, U_2 sono sottospazi vettoriali di V si ha:*

- $U_1 \subset U_2 \implies (U_1)^\circ \supset (U_2)^\circ$.
- $(U_1 + U_2)^\circ = (U_1)^\circ \cap (U_2)^\circ$.
- $(U_1 \cap U_2)^\circ \supset (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$. *Vale inoltre l'uguaglianza se V ha dimensione finita.*

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia: ogni funzionale lineare che annulla U_1 deve anche annullare $U_2 \subset U_1$.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, se ϕ annulla $U_1 + U_2$, annulla sicuramente sia U_1 che U_2, poiché sono entrambi sottospazi di $U_1 + U_2$. Viceversa, se ϕ annulla sia U_1 che U_2, per linearità deve annullare anche le somme di elementi di U_1 e di U_2.

L'inclusione $(U_1)^\circ + (U_2)^\circ \subset (U_1 \cap U_2)^\circ$ è facile (dimostratela!). Per quanto riguarda l'uguaglianza, vedremo tra breve che i due sottospazi vettoriali hanno la stessa dimensione. □

Proposizione 3.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Se $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale, si ha*

$$\dim U + \dim U^\circ = \dim V.$$

Dimostrazione. Prendiamo una base $u_1, \dots, u_k$ di U e completiamola ad una base $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V; indichiamo inoltre con $\phi^1, \dots, \phi^n$ la corrispondente base duale di V^*.

Se $\phi \in U^\circ$, allora $\phi(u) = 0$ per ogni $u \in U$. Poiché

$$\phi = \phi(u_1)\phi^1 + \dots + \phi(u_k)\phi^k + \phi(v_{k+1})\phi^{k+1} + \dots + \phi(v_n)\phi^n,$$

dall'annullarsi di $\phi(u_1), \dots, \phi(u_k)$ si ricava $\phi \in \mathrm{span}(\phi^{k+1}, \dots, \phi^n)$. Questo mostra che $U^\circ \subset \mathrm{span}(\phi^{k+1}, \dots, \phi^n)$. Viceversa, sia $\phi \in \mathrm{span}(\phi^{k+1}, \dots, \phi^n)$. Poiché $\phi^{k+1}, \dots, \phi^n$ appartengono tutti a U°, si avrà $\phi \in U^\circ$. Pertanto $\mathrm{span}(\phi^{k+1}, \dots, \phi^n) \subset U^\circ$, e vale quindi $U^\circ = \mathrm{span}(\phi^{k+1}, \dots, \phi^n)$.

La lineare indipendenza di $\phi^{k+1}, \dots, \phi^n$ mostra quindi che $\dim U^\circ = n - k$. Per costruzione, sappiamo che $\dim U = k$ e quindi $\dim U + \dim U^\circ = n = \dim V$. □

Corollario 3.4. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $U_1, U_2 \subset V$ sono sottospazi vettoriali, allora $(U_1 \cap U_2)^\circ = (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $(U_1 \cap U_2)^\circ$ e $(U_1)^\circ + (U_2)^\circ$ hanno la stessa dimensione. Poniamo $\dim V = n, \dim U_1 = h, \dim U_2 = k, \dim(U_1 \cap U_2) = l$. Allora $\dim(U_1 \cap U_2)^\circ = n - l$, mentre, grazie alla formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim((U_1)^\circ + (U_2)^\circ) = \dim(U_1)^\circ + \dim(U_2)^\circ - \dim((U_1)^\circ \cap (U_2)^\circ).$$

Ora, $\dim(U_1)^\circ = n - h, \dim(U_2)^\circ = n - k$, mentre

$$\dim((U_1)^\circ \cap (U_2)^\circ) = \dim((U_1 + U_2)^\circ) = n - (h + k - l).$$

Riassumendo,

$$\dim((U_1)^\circ + (U_2)^\circ) = \dim(U_1)^\circ + \dim(U_2)^\circ - \dim((U_1)^\circ \cap (U_2)^\circ) = (n-h) + (n-k) - (n-(h+k-l)) = n-l.$$

[2] Cioè non esistono applicazioni lineari suriettive, né tantomeno isomorfismi, tra V e V^*.

Possiamo finalmente concludere: sappiamo già che $(U_1 \cap U_2)^\circ \supset (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$. Poiché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, devono necessariamente coincidere. $\square$

Se $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale, $\dim U^\circ$ si chiama anche *codimensione di U*. Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha ovviamente codimensione finita. Ad ogni modo, un sottospazio di dimensione infinita di uno spazio vettoriale di dimensione infinita può avere codimensione finita.

Osservazione 3.5. L'uguaglianza $(U_1 \cap U_2)^\circ = (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$ vale in realtà in generale, anche senza l'ipotesi che V abbia dimensione finita, ma servono nozioni che durante il corso non abbiamo sviluppato. Si può effettivamente generalizzare il concetto di base al caso infinito, e sotto tale generalizzazione si può usare l'assioma della scelta per mostrare che

- Ogni spazio vettoriale (anche di dimensione infinita) possiede almeno una base.
- Ogni insieme (anche infinito) di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V si completa ad una base di V.

Con tali informazioni, prendete una base di $U_1 \cap U_2$ e completatela prima ad una base di U_1 e poi ad una base di U_2. Il fatto che l'unione di queste due basi sia una base di $U_1 + U_2$ si dimostra nello stessa maniera che abbiamo usato nella dimostrazione della formula di Grassmann. Questa base di $U_1 + U_2$ può poi essere completata ad una base di V.

Ciascun funzionale lineare su V è determinato dai valori che assume sugli elementi di questa base di V, e i funzionali appartenenti a $(U_1 \cap U_2)^\circ$ sono esattamente quelli che si annullano sulla base di $U_1 \cap U_2$ scelta. Dato $\phi \in (U_1 \cap U_2)^\circ$, costruiamo ora due funzionali lineari $\phi_1 \in (U_1)^\circ, \phi_2 \in (U_2)^\circ$ come segue: ϕ_1 assume su ciascun vettore della base gli stessi valori che assume ϕ, **tranne su quelli che sono serviti per completare la base di** $U_1 \cap U_2$ **ad una base di** U_1, sui quali vale 0. ϕ_2 vale invece 0 su tutti i vettori della base di V, **tranne su quelli che sono serviti per completare la base di** $U_1 \cap U_2$ **ad una base di** U_1, sui quali assume gli stessi valori assunti da ϕ. Per costruzione, $\phi_1 \in (U_1)^\circ, \phi_2 \in (U_2)^\circ$ e $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Questo mostra l'inclusione inversa $(U_1 \cap U_2)^\circ \subset (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$.

4. Trasposta di un'applicazione lineare

Se $T : U \to V$ è un'applicazione lineare, rimane definita un'applicazione $T^* : V^* \to U^*$ ponendo $T^*(\phi) := \phi \circ T$, dove $\phi \in V^*$. Questo è equivalente a porre $\langle T^*(\phi), u\rangle := \langle \phi, T(u)\rangle$.

Osservazione 4.1. $T^*(\phi) = \phi \circ T$ è lineare in quanto composizione di applicazioni lineari. La dimostrazione della linearità di $T^* : V^* \to U^*$ è facile e si fa come sempre (fatelo!).

L'applicazione T^* è detta *applicazione trasposta* dell'applicazione T. Si può costruire anche $T^{**} : U^{**} \to V^{**}$. Quando U, V hanno dimensione finita, possiamo identificare U^{**} e V^{**} con U e V rispettivamente; sotto tale identificazione T^{**} coincide con l'applicazione T.

Proposizione 4.2. *Se T^* è l'applicazione trasposta di $T : U \to V$, allora*

- $\ker T^* = (\mathit{Im}\ T)^\circ$;
- *$\mathit{Im}\ T^* \subset (\ker T)^\circ$. Inoltre vale $\mathit{Im}\ T^* = (\ker T)^\circ$ se U ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in V^*$ tale che $T^*(\phi) = 0$. Questo equivale a dire che $\phi \circ T = 0$, cioè che ϕ si annulla sull'immagine di T. In altre parole, $\phi \in \ker T^*$ accade esattamente quando $\phi \in (\mathrm{Im}\ T)^\circ$.

La seconda affermazione è più delicata. Se $\phi \in \mathrm{Im}\ T^*$, allora esiste $\psi \in V^*$ tale che $\phi = T^*\psi = \psi \circ T$. Ma allora ψ si annulla sugli elementi di $\ker T$. Questo mostra che $\mathrm{Im}\ T^* \subset (\ker T)^\circ$.

Viceversa, supponiamo che $\phi \in (\ker T)^\circ$ e che U abbia dimensione finita. Scegliamo una base $z_1, \ldots, z_k$ di $\ker T$ e completiamola ad una base $z_1, \ldots, z_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ di U. Chiaramente, il funzionale ϕ si annulla sugli elementi $z_1, \ldots, z_k$; inoltre, come già dimostrato a lezione, le immagini $v_{k+1} = T(u_{k+1}), \ldots, v_n = T(u_n)$ sono elementi linearmente indipendenti di V. Sia $\psi \in V^*$ un funzionale tale che $\psi(v_{k+1}) = \phi(u_{k+1}), \ldots, \psi(v_n) = \phi(u_n)$. Allora $\phi = \psi \circ T$ e quindi $\phi \in \mathrm{Im}\ T^*$. $\square$

Osservazione 4.3. La dimostrazione appena fatta si generalizza al caso in cui U abbia dimensione infinita, dal momento che richiede solo l'esistenza di una base di $\ker T$, e la possibilità di estendere tale base ad una base di U.

Corollario 4.4. *Se $T : U \to V$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora $\dim \ker T^* = dim V - \dim \mathit{Im}\ T$ e $\dim \mathit{Im}\ T^* = \dim U - \dim \ker T$. In particolare, $\dim \mathit{Im}\ T = \dim \mathit{Im}\ T^*$ e $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.*

Il motivo per il quale T^* è detta applicazione trasposta è che la matrice che la descrive è la trasposta della matrice che descrive T. Più precisamente:

Proposizione 4.5. *Siano U, V spazi vettoriali di dimensione finita, sui quali abbiamo scelto le basi $B : u_1, \dots, u_m$ e $C : v_1, \dots, v_n$ rispettivamente. Indichiamo con $B^* : \phi^1, \dots, \phi_m$ e $C^* : \psi^1, \dots, \phi^n$ le corrispondenti basi duali di U^*, V^* rispettivamente. Se $T^* : V^* \to U^*$ è l'applicazione trasposta dell'applicazione lineare $T : U \to V$, allora la matrice associata a T^* utilizzando le basi C^*, B^* è la trasposta della matrice associata a T utilizzando le basi B, C.*

Dimostrazione. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

la matrice $n \times m$ che descrive T utilizzando B come base in partenza e C come base in arrivo. Le colonne di A descrivono l'azione di T nel senso che

$$T(u_i) = a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n, \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

L'applicazione lineare $T^* : V^* \to U^*$ soddisfa $T^*(\psi^j) = \psi^j \circ T$ o, equivalentemente

$$\langle T^*(\psi^j), u\rangle = \langle \psi^j, T(u)\rangle.$$

Sostituendo u_i al posto di u, si ottiene

$$\langle T^*(\psi^j), u_i\rangle = \langle \psi^j, T(u_i)\rangle = \langle \psi^j, a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n\rangle = a_{ji},$$

pertanto

$$T^*(\psi^j) = a_{j1}\phi^1 + \dots + a_{jm}\phi^m, \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, n.$$

Ma allora le coordinate di $T^*(\psi^j)$ nella base $\phi^1, \dots, \phi^m$ sono $a_{j1}, \dots, a_{jm}$. Ponendo tali coordinate nella j.esima colonna di una matrice, per ogni scelta di j, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

cioè la trasposta della matrice A. □

Poiché il rango di un'applicazione lineare coincide con il rango della matrice associata, il Corollario 4.4 e la Proposizione 4.5 forniscono insieme una nuova dimostrazione del fatto che il rango di una matrice è uguale al rango della matrice trasposta.

Corollario 4.6. *Siano $T : U \to V$, $S : V \to W$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita, e $S \circ T : U \to W$ la loro composizione. Allora $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*

Se A è la matrice associata a S e B è la matrice associata a T (in basi opportunamente scelte) allora le matrici associate a T^*, S^*, $(S \circ T)^*$ sono B^t, A^t, $(AB)^t$. Poiché $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$, si ottiene $(AB)^t = B^tA^t$.

Dimostrazione. Dalla definizione, abbiamo

$$(S \circ T)^*(\phi) = \phi \circ (S \circ T) = (\phi \circ S) \circ T = (S^*(\phi)) \circ T = T^*(S^*(\phi)),$$

per ogni scelta di $\phi \in W^*$; di conseguenza $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. La seconda affermazione segue immediatamente. □

Osservazione 4.7. Chiaramente, che $(AB)^t$ sia uguale a B^tA^t può essere verificato anche direttamente moltiplicando le matrici.

5. Un esempio

A ciascuna matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbf{k})$ possiamo associare una corrispondente applicazione lineare $L_A : \mathbf{k}^m \to \mathbf{k}^n$. Questa corrispondenza fornisce un isomorfismo lineare tra gli spazi vettoriali $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbf{k})$ e $\mathrm{Hom}(\mathbf{k}^m, \mathbf{k}^n)$ e si possono identificare applicazioni lineari e matrici senza troppi problemi. In particolare, quando $n = 1$, i funzionali lineari su $\mathbf{k}^m$ sono identificabili con le matrici $1 \times m$, cioè con gli elementi di $\mathbf{k}^{\times m}$. In termini più espliciti, ha senso indicare con la riga $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{k}^{\times m}$ il funzionale lineare $\phi_{\mathbf{a}} : \mathbf{k}^m \to \mathbf{k}$ definito da

$$\phi_{\mathbf{a}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_mx_m.$$

Consideriamo ora l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

che la rappresenta nelle basi canoniche in partenza e in arrivo. Questo vuol dire, in particolare, che Im L_A è generato linearmente dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione trasposta è $(L_A)^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$ alla quale è associata, nelle basi duali a quelle canoniche, la matrice

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio Im $(L_A)^* \subset (\mathbb{R}^3)^*$ è allora generato linearmente dagli elementi di $(\mathbb{R}^3)^*$ che, nella base duale a quella canonica, hanno coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Tali funzionali sono quelli che abbiamo identificato ai vettori riga $(1\,2\,4), (3\,6\,12)$. Ricapitolando, Im $L_A \subset \mathbb{R}^2$ è il sottospazio vettoriale generato dalle colonne di A, mentre Im $(L_A)^* \subset (\mathbb{R}^3)^*$, sotto l'identificazione di $(\mathbb{R}^3)^*$ con $\mathbb{R}^{\times 3}$, è il sottospazio vettoriale generato dalle righe di A. L'annullatore di $\ker L_A$ è Im $(L_A)^*$, e questo ci conferma che il nucleo di L_A si calcola risolvendo il sistema omogeneo di equazioni lineari i cui coefficienti sono dati dalla matrice A; l'annullatore di Im L_A è invece $\ker(L_A)^*$, e questo ci spiega che i coefficienti delle equazioni cartesiane che descrivono Im L_A si possono trovare esibendo (una base dell'insieme del)le soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari i cui coefficienti sono dati dalla matrice A^t.

6. Che cosa vuol dire "canonico"?

Il mantra classico prevede che l'immersione (cioè l'appplicazione lineare iniettiva) di uno spazio vettoriale nel suo biduale sia *canonica* perché *non dipende dalla scelta di una base*. Questa affermazione è opinabile, perché se costruisco un'applicazione utilizzando segretamente una base, e mi rifiuto di ammetterlo anche sotto tortura, avrete grossi problemi a stabilire se tale applicazione sia "canonica" oppure no.

"Prendere il duale" è un'operazione

$$V \mapsto V^*$$

che si esegue sugli spazi vettoriali, e produce spazi vettoriali. Tuttavia, abbiamo visto che tale operazione può essere eseguita anche sugli omomorfismi (leggi *applicazioni lineari*) tra spazi vettoriali

$$T \in \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto T^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

in modo da mandare opportunamente composizioni in composizioni

$$S \circ T \mapsto T^* \circ S^*.$$

Non lo abbiamo verificato, ma l'applicazione trasposta dell'identità $\mathrm{id} : V \to V$ è l'identità $\mathrm{id} : V^* \to V^*$. Queste informazioni, prese tutte insieme, si chiamano *funtore dalla categoria degli spazi vettoriali alla categoria degli spazi vettoriali*. Si tratta di un funtore *controvariante*, poiché rovescia le composizioni di applicazioni.

Non è difficile convincersi che eseguendo tale funtore due volte si ottenga un funtore *covariante*, che cioè non rovescia le composizioni di applicazioni. E' il funtore che associa a ciascuno spazio vettoriale il suo biduale, e a ciascun omomorfismo $T : U \to V$ il corrispondente omomorfismo $T^{**} : U^{**} \to V^{**}$. Ad ogni modo, per cercare funtori covarianti non bisogna andare così lontani: associare a ciascuno spazio vettoriale se stesso, e a ciascun omomorfismo il medesimo omomorfismo costituisce sicuramente un funtore controvariante: il cosiddetto *funtore identico*. Il gergo tipicamente utilizzato è che una categoria (nel nostro caso $\mathcal{V}ec$) possiede *oggetti* (nel nostro caso gli spazi vettoriali) e *morfismi* (nel nostro caso le applicazioni lineari) che possono essere composti opportunamente e tra i quali vi sono le identità di ciascun oggetto.

Quando avete due funtori covarianti $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dalla stessa categoria $\mathcal{C}$ nella stessa categoria $\mathcal{D}$, potete considerare le loro *trasformazioni naturali*. Una trasformazione naturale $T : F \to G$ è una collezione di morfismi $T_X : F(X) \to G(X)$ nella categoria $\mathcal{D}$ al variare di X tra gli oggetti della categoria $\mathcal{C}$, che hanno collettivamente la proprietà che se $f : X \to Y$ è un morfismo nella categoria $\mathcal{C}$, allora $T_Y \circ F(f) = G(f) \circ T_X$.

L'immersione *canonica* di ciascuno spazio vettoriale V nel suo biduale V^{**} non è altro che una trasformazione naturale tra il funtore identico tra le categorie di spazi vettoriali e il funtore che associa a ciascuno spazio vettoriale il suo biduale, tra le stesse categorie. In soldoni, l'immersione è canonica perché si comporta bene rispetto alle opportune applicazioni lineari: $\iota_V \circ T = T^{**} \circ \iota_U$ ogni qual volta $T : U \to V$ sia lineare. Poiché T, quando è invertibile, può essere utilizzata per mettere in corrispondenza una base di U con una base di V, non è in fondo del tutto inappropriato dire che l'immersione canonica "non dipende dalla scelta di una base".

Per esercizio, calcolate tutte le trasformazioni naturali tra il funtore identico e il funtore identico, sempre tra la categoria $\mathcal{V}ec$ e se stessa.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: `dandrea@mat.uniroma1.it`