

Esercizi di algebra lineare (23 settembre 2019)

Esercizio 1. Scrivere i seguenti numeri nella forma $a + b\sqrt{2}$:

$$(1 + \sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}), \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}, \quad (1 - \sqrt{2})^3, \quad \frac{(2 - 2\sqrt{2})^{11}}{(2 - \sqrt{2})^{10}}.$$

Esercizio 2. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $a + ib$:

$$(\cos(\pi/9) + i \sin(\pi/9))^3, \quad \frac{2 + i}{i + 2}, \quad i^{2017}, \quad \frac{13 - 2i}{6 + 4i}, \quad \frac{(1 + i)^{2017}}{16^{252}}.$$

Esercizio 3. Si considerino i tre numeri complessi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -2i$:

- calcolare i tre quozienti $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ e $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$;
- dire, motivando la risposta, se il triangolo nel piano di Gauss di vertici z_1, z_2, z_3 è acutangolo, rettangolo, oppure ottusangolo;
- trovare, oppure dimostrare che non esistono, tre numeri complessi distinti u_1, u_2, u_3 tali che i tre quozienti $\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$, $\frac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2}$ e $\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}$ hanno tutti parte reale negativa.

Esercizio 4. Calcolare, nella forma $a + ib$, le radici quadrate dei numeri complessi $1 + 2i$, $4 - 3i$ e $1 - 4i$.

Esercizio 5. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $p(x) = x^7 - 4x^5 + 3x^2 + 2x + 1 - 2i$. Quanto vale $p(\bar{\alpha})$?

Esercizio 6. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^2 + x + 5$. Trovare, oppure dimostrare che non esistono, due numeri razionali a, b tali che $(a + b\xi)(1 - \xi) = 1$.