Esercizi di algebra lineare (30 novembre 2019)

Esercizio 1. Si considerino le seguenti 4 matrici a coefficienti reali:
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}6&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3-\sqrt{5}&0\\0&0&3+\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$
Tra le 6 possibili coppie, dire quali sono formate da matrici simili e quali no.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix}t&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}$ e dedurre che per ogni $s\in\mathbb{K}$, $s\neq 0$, le matrici $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}$ sono simili. Dimostrare che per $s=0$ le matrici $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *non* sono simili.

Esercizio 3. Considerare la seguente matrice reale A
$$A := \begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&-1&1\\9&3&-4\end{pmatrix}$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A (ossia gli autovalori dell'applicazione lineare associata L_A).

(ii) Dimostrare che A non è diagonalizzabile, ossia che non è simile ad alcuna matrice diagonale.

Esercizio 4. Considerare la matrice $A\in\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ seguente
$$A := \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\14&-13&4\end{pmatrix}.$$

(i) Dire se il vettore $v_6=-e_1-e_2+6e_3$ sia autovettore per A.

(ii) Dire se 2 sia autovalore di A.

Esercizio 5. Considerare l'applicazione $L_B:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ associata a
$$B := \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\14&-13&4\end{pmatrix}.$$
Considerare la fibra di $A_s=L_B^{-1}(w_s)$ sopra il punto $w_s=e_1+se_2$ al variare di $s\in\mathbb{R}$.
Per quegli s per cui A_s è non vuoto, determinare la giacitura $\overrightarrow{A}_s$ di A_s e un punto $p_s\in A_s$.

Esercizio 6 ([1])**.** Siano V,W spazi vettoriali e siano $A\subseteq V$ e $B\subseteq W$ sottospazi affini. Sia inoltre $f:A\to B$ una applicazione affine.

(i) Dimostrare che, se f è biiettiva, allora $f^{-1}:B\to A$ è una applicazione affine.

(ii) Supponiamo ora $V=A=\mathbb{K}^n$ e $W=B=\mathbb{K}^n$, e sia f data da $f(X)=PX+w$, dove $P\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ and $w\in\mathbb{K}^n$.
Dimostrare che f è invertibile se e solo se P è invertibile. In tal caso, determinare $Q\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ e $v\in\mathbb{K}^n$ tali che $f^{-1}(Y)=QY+v$ per ogni $Y\in\mathbb{K}^n$.

(iii) Supponiamo $V=A=\mathbb{K}^n$ e $W=B=\mathbb{K}^n$ e $f(X)=PX+w$ per opportuni $P\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ and $w\in\mathbb{K}^n$.
Supponiamo che f non abbia alcun punto fisso, ossia che $f(X)\neq X$ per ogni $X\in\mathbb{K}^n$.
Dimostrare che allora 1 è autovalore per P.

[1] Questo esercizio è opzionale e non verrà corretto.