Esercizi di algebra lineare (9 dicembre 2019)

Esercizio 1. Siano $L_A, L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gli endomorfismi associati alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare gli autovalori di L_A e di L_B, e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(ii) Dire se L_A e L_B siano diagonalizzabili.

(iii) Determinare basi degli autospazi di L_A e di L_B.

Esercizio 2. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, considerare l'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & t \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice reale A_t sia diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 e sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $F(M) := A^T M A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori di F, le loro molteplicità algebriche e geometriche e i relativi autospazi. Dire se F sia diagonalizzabile.

Esercizio 4. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ e sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

(a) Dimostrare che il polinomio caratteristico p_C di C soddisfa $(-1)^n p_C = t^n - (a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1} t + a_n)$.

(b) Dimostrare che $C^{k-1} e_1 = e_k$ per $k = 1, \dots, n$ e che $q(C) e_1 \neq 0$ per ogni $0 \neq q \in \mathbb{K}[t]_{\leq n-1}$.

(c) Dimostrare che $p_C(C) e_1 = 0$.

(d) Dimostrare che $p_C(C) e_k = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e quindi $p_C(C) = 0$.

(e) I polinomi $q \in \mathbb{K}[t]$ tali che $q(C) = 0$ sono esattamente i multipli di p_C.

Esercizio 5 (Opzionale - non sarà corretto)**.** Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base dello spazio quoziente V/U.