# Esercizi di algebra lineare (16 dicembre 2019)

**Esercizio 1.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Dimostrare che il polinomio caratteristico di $f$ coincide con quello della sua duale $f^\vee : V^\vee \to V^\vee$, e che il polinomio minimo di $f$ coincide con quello di $f^\vee$.

**Esercizio 2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^k = 5f$ per un certo intero $k \geq 2$. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$, sia $f : V \to V$ una applicazione lineare invertibile. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile se e solo se $f^2$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \to V$ una applicazione lineare. Supponiamo che il sottospazio $W \subseteq V$ sia $f$-invariante e denotiamo con $g : W \to W$ la restrizione di $f$ a $W$.

(a) Dimostrare che, se $f$ è triangolabile, allora $g$ è triangolabile.

(b) Dimostrare che, se $f$ è diagonalizzabile, allora $g$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 5.** Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_A$ e dire se $L_A$ sia triangolabile.

(ii) Determinare gli autovalori di $L_A$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se $L_A$ sia diagonalizzabile.

(iii) Determinare il polinomio minimo $q_A$.

(iv) Se $L_A$ è diagonalizzabile, determinare una base che la diagonalizza.
Se $L_A$ è triangolabile, determinare una base che la triangola.