Esercizi di algebra lineare (7 ottobre 2019)

Esercizio 1. Determinare tre numeri reali a, b, c tali che

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = x - y + 2z = 0 \right\} = \{0\}\,.$$

Esercizio 2. Completare i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ad una base di $\mathbb{Q}^4$.

Esercizio 3. Trovare, oppure dimostrare che non esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ contenuta nell'unione $H \cup K$ dei due sottospazi di equazioni:

$$H = \{x_1 + x_3 = x_2 - 3x_4 = 0\}, \qquad K = \{x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_4 = 0\}\,.$$

Esercizio 4. Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Dimostrare che per ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $H \oplus V = \mathbb{R}^3$ esiste un unico vettore $h \in H$ tale che

$$h + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V\,.$$

Esercizio 5. Assumendo come già noto che il polinomio $p(t) = t^7 + t - 1$ possiede 7 radici complesse distinte, dire se tali radici siano linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6 ($\star$)**.** Sia $V \subset \mathbb{K}[x]$ un sottospazio vettoriale non finitamente generato. Dimostrare che esiste una successione infinita $v_0, v_1, v_2, \ldots$ di vettori in V tali che:

1. per ogni $n > 0$, il vettore v_n, pensato come un polinomio in $\mathbb{K}[x]$, abbia grado $\geq n$;
2. per ogni $n > 0$ i vettori $v_0, v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente indipendenti;
3. ogni vettore in V sia combinazione lineare di un numero finito di vettori v_i.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{K}^n$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p$ e $n \geq 1$. Quante rette per l'origine ci sono in V?