Esercizi di algebra lineare (20 ottobre 2019)

Esercizio 1. Consideriamo $V = \mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e siano $v_1, v_2 \in V$ i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i+1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -3+i \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che (v_1, v_2) è una coppia di vettori in V linearmente indipendente (sul campo $\mathbb{R}$).

(ii) Completare (v_1, v_2) ad una base di $\mathbb{C}^2$ (sul campo $\mathbb{R}$).

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi reali in t di grado al più n. Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ definita come $f(p) := p(t+1) - p(t-1) - p(1)$.

(i) Dimostrare che f è lineare.

(ii) Dire se f sia iniettiva. Dire se f sia suriettiva.

(iii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f.

Esercizio 3. Fissiamo $n \geq 0$ un intero, e siano $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distinti.
Considerare l'applicazione $F \colon \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definita come

$$F(p) := (p(\alpha_0),\, p(\alpha_1),\, \dots,\, p(\alpha_n)).$$

(a) Dimostrare che F è lineare ed è invertibile.

(b) Per ogni $i = 0, \dots, n$ determinare $p_i \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ tale che $F(p_i) = e_{1+i}$, dove $(e_1, \dots, e_{n+1})$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Determinare l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ della parabola in $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$.

Esercizio 4. Siano $f : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. La *restrizione* $f|_U : U \to W$ è definita come l'applicazione che soddisfa $f|_U(u) := f(u)$ per ogni $u \in U$. Dimostrare che la restrizione $f|_U : U \to W$ è un invertibile se e solo U è complementare di $\ker(f)$ in V, ossia $V = U \oplus \ker(f)$.

Esercizio 5. Una applicazione lineare $f : V \to V$ si dice *proiezione* se $f = f \circ f$.
Dimostrare che, se f è una proiezione, allora $f(v) = v$ per ogni $v \in \mathrm{Im}(f)$, e valgono

$$V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)\,, \qquad e \qquad \mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{Id} - f)\,.$$