Esercizi di algebra lineare (24 ottobre 2019)

Esercizio 1. (i) Siano date le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti AB e BA.

(ii) Calcolare il prodotto CD delle matrici reali

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e dedurne che per le matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

(iii) Considerare la matrice reale

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare M^3 (ossia $M \cdot M \cdot M$), e dedurne che non vale la proprietà per cui le potenze di un elemento non nullo siano necessariamente non nulle.

Esercizio 2. Sia data la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare, se esiste, l'inversa di A, ossia un matrice B reale 2×2 tale che $AB = BA = I_2$.

Esercizio 3. Considerare l'applicazione lineare[1] $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Esibire una base di $\ker(L_A)$ e calcolarne la dimensione.

(b) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\mathrm{Im}(L_A)$.

Definizione. Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. La *trasposta* A^T di A è matrice $n \times n$ definita come $(A^T)_{ij} := A_{ji}$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$. (Informalmente, A^T si ottiene da A riflettendo rispetto alla diagonale principale.)

Esercizio 4. Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che, se $A^T \cdot A = 0$, allora $A = 0$.

Esercizio 5. Considerare le matrici quadrate reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia $C = BA$. Dire se C sia invertibile (ossia se esista una matrice D delle stesse dimensioni di C tale che $CD = DC = I$).

[1] A lezione ho dato una corrispondenza biunivoca tra applicazioni lineari $K^m \to K^n$ e matrici $n \times m$ a coefficienti in K. Qui usiamo la notazione del libro, per la quale l'applicazione associata alla matrice A è L_A, e la matrice associata all'applicazione T è M_T.