Esercizi di algebra lineare (30 ottobre 2019)

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\mathrm{Im}(L_A)$ e una base di $\ker(L_A)$.

(b) Determinare un insieme minimale di equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(L_A)$ e per $\ker(L_A)$.

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

(a) Per quali valori di t la matrice $A(t)$ è invertibile?

(b) Per quei valori di t per i quali la matrice $A(t)$ è invertibile, determinare $A(t)^{-1}$.

(c) Per ogni t_0 per cui $A(t_0)$ non è invertibile, dire se il vettore $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ o il vettore $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartengano all'immagine di $L_{A(t_0)}$.

Definizione. Una *sottomatrice* di una matrice A è una matrice ottenuta da A cancellando alcune righe e alcune colonne. Un *minore* M di ordine k di A è una sottomatrice $k \times k$ quadrata M di A. Se M è un minore di ordine k di A, un *orlato* di M è un minore $(k+1) \times (k+1)$ che contiene M.

Definizione. La *trasposta* della matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ è la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ definita da $(A^T)_{ij} := A_{ji}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Esercizio 3. Siano $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare basi e equazioni cartesiane (in numero minimale) di U e di V.

(ii) Determinare una base di $U + V$ e una base di $U \cap V$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane per un supplementare di $U \cap V$.

Esercizio 4. Siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ sottospazi vettoriali dati da $W = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + 3x_4 = 0\}$ e da $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare dimensioni e basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

Esercizio 5. Data una matrice P in $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, denotiamo che $P_i \in (\mathbb{K}^*)^m$ la riga i-esima di P.

(a) Dimostrare che, se $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, allora il sottospazio $\mathrm{Span}(A_1, \ldots, A_n)$ di $(\mathbb{K}^*)^m$ ha dimensione uguale al rango di A.

(b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Dimostrare che, se B si ottiene da A tramite operazioni elementari sulle righe, allora $\mathrm{Span}(B_1, \ldots, B_n) = \mathrm{Span}(A_1, \ldots, A_n) \subseteq (\mathbb{K}^*)^m$.

(c) Dimostrare che, se $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ è ridotta a scala per righe e ha k pivots, allora $(B_1, \ldots, B_k)$ è una lista di k vettori linearmente indipendenti in $(\mathbb{K}^*)^m$.

(d) Dimostrare che, se $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ ha rango k, allora esistono k righe di A linearmente indipendenti.

(e) Dimostrare che $Q \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{K})$ quadrata è invertibile se e solo se Q^T è invertibile.

(f) Dimostrare che, se $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ha rango almeno k, allora esiste un minore $k \times k$ di A invertibile.

(g) Dimostrare che, se $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ha un minore $k \times k$ invertibile, allora A ha rango almeno k.

(h) Dimostrare che

$$\mathrm{rg}(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid A \text{ contiene un minore } k \times k \text{ invertibile}\}$$

e che quindi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

(i) Dimostrare che il rango di una matrice A è esattamente k se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

   (a) esiste un minore M di A di ordine k invertibile

   (b) nessun orlato di M è invertibile.