Esercizi di algebra lineare (8 novembre 2019)

Definizione. Una matrice quadrata D si dice *diagonale* se $D_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Esercizio 1. Sia A una matrice $n \times n$ con entrate nel campo $\mathbb{K}$.

(i) Supponiamo che $AD = DA$ per ogni matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale.
Dimostrare che allora A è diagonale.

(ii) Supponiamo che $AB = BA$ per ogni matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
Dimostrare che allora B è un multiplo di I_n.

Esercizio 2. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ e dedurre la disuguaglianza $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. Trovare un esempio dove $\mathrm{rg}(f + g) = 2$ e $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) = 1$.

Esercizio 3. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(V)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to V$ una applicazione lineare. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia ${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}}$ la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).

(a) Sia $\mathcal{C}$ un'altra base di V e sia ${}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}}$ la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{C}$ (sia in partenza che in arrivo).
Dimostrare che esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che ${}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}} = P \cdot {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} \cdot P^{-1}$.

(b) Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice con la proprietà che esiste $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $A = P \cdot {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} \cdot P^{-1}$.
Dimostrare che esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $A = {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}}$.

Esercizio 5. Considerare i seguenti polinomi reali in t:

$$p_1 = 1 + t, \quad p_2 = 1 + 2t + t^2, \quad p_3 = t - t^2, \qquad r_1 = 1 - t, \quad r_2 = 2 + t.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e che $\mathcal{C} = (r_1, r_2)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

(b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2 - t + t^2$ e di $q_2 = 3 + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(c) Considerare l'applicazione lineare $D\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ definita come $D(p) := \dfrac{dp}{dx}$.
Calcolare la matrice ${}_{\mathcal{C}}[D]_{\mathcal{B}}$ che rappresenta l'applicazione lineare D rispetto alle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo.

(d) Verificare che l'applicazione $\theta_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}^3$ che calcola le coordinate nella base $\mathcal{B}$ manda vettori appartenenti a $\ker(D)$ in vettori appartenenti al nucleo dell'applicazione lineare associata a ${}_{\mathcal{C}}[D]_{\mathcal{B}}$, e che in effetti $\theta_{\mathcal{B}}$ determina un isomorfismo tra questi due nuclei.

(e) Verificare che l'applicazione $\theta_{\mathcal{C}} : \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{K}^2$ che calcola le coordinate nella base $\mathcal{C}$ manda vettori appartenenti a $\mathrm{Im}(D)$ in vettori appartenenti all'immagine dell'applicazione lineare associata a ${}_{\mathcal{C}}[D]_{\mathcal{B}}$, e che in effetti $\theta_{\mathcal{C}}$ determina un isomorfismo tra queste due immagini.

Esercizio 6. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ sottospazi vettoriali. Denotiamo con $\mathrm{Hom}(V, W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a W. Dimostrare che l'insieme

$$H := \{ f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid f(A) \subseteq B \}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$ di dimensione $[\dim(V) - \dim(A)] \dim(W) + \dim(A) \dim(B)$.

*(Suggerimento: scegliere basi di A e di B ed estenderle a basi di V e di W.
Come sono fatte le matrici che rappresentano una $f \in H$ rispetto a tali basi?)*