

Esercizi di algebra lineare (21 novembre 2019)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e sia $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ la base usuale di V , dove $p_0 = 1$, $p_1 = t$, $p_2 = t^2$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo inoltre le applicazioni $\varphi_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ date da $\varphi_\alpha(q) = q(\alpha)$.

- (a) Dimostrare che $\mathcal{E}^\vee = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ è una base di V^\vee .
- (b) Determinare la matrice di cambio di coordinate ${}_{\mathcal{B}^\vee}[\text{id}]_{\mathcal{E}^\vee}$, dove \mathcal{B}^\vee è la base di V^\vee duale di \mathcal{B} .
- (c) Determinare la base \mathcal{E} di V la cui duale è \mathcal{E}^\vee .

Esercizio 2. Siano $a, b, c, e \in \mathbb{R}$. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & e & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. I numeri 2418, 1395, 8091, 8339 sono numeri interi divisibili per 31.

Dimostrare (senza effettuare il conto esplicito) che $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ è un intero divisibile per 31.

Esercizio 4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, considerare la matrice $B_t \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita come

$$B_t := \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+2 & t^2+1 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$, calcolare il rango di B_t .
- (b) Per quei t per cui B_t è invertibile, calcolare la matrice dei cofattori¹ di B_t e l'inversa di B_t .

Esercizio 5. Osservare che nel sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

il minore 2×2 della matrice dei coefficienti corrispondente alle variabili x e y è invertibile. Risolvere il sistema dato con il metodo di Cramer, aggiungendo al sistema l'equazione $z = \lambda$, dove λ è un parametro.

Esercizio 6. (a) Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

- (b) Dire se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$ tale che $B^2 = 2I_2$, giustificando la propria risposta. Se sì, esibirne almeno una.
- (c) Dire se esiste una matrice $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$ tale che $C^2 = 2I_3$, giustificando la propria risposta. Se sì, esibirne almeno una.

¹Vedi le dispense a pagina 175.