

Tutoraggio del 28 novembre 2019

Esercizio 1. Dire quali delle seguenti applicazioni siano lineari, e in caso scriverne le matrici associate:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ y \\ x + 5y \end{pmatrix}$;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 - x^2 - 1$;
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$;
- $f : \mathbb{Z}/(5) \rightarrow \mathbb{Z}/(5)$, $f(x) = x^5$.

Dire inoltre come sono fatte tutte le applicazioni lineari $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti applicazioni (non lineari!) siano iniettive e/o suriettive:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$;
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 \bar{z}$.

Esercizio 3. Decidere quali dei seguenti sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{\times 2}$, motivando la risposta.

- Il semipiano $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$;
- il quadrante $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$;
- la bisettrice del primo e terzo quadrante $\{(x, y) \mid x = y\}$;
- l'insieme dei punti (x, y) le cui coordinate soddisfano $xy \geq 0$;
- l'insieme dei punti (x, y) le cui coordinate soddisfano $x^2 + y^2 \geq 0$.

Esercizio 4. Mostrare, per induzione su n , che

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$