Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Prova scritta in modalità telematica - 1 luglio 2020

Tre esercizi, 90 minuti di tempo

Occorre motivare le risposte.
Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^2 - z = |z|$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t a coefficienti reali di grado al più 5. Dopo averne calcolato la dimensione, dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi V, W, Z di $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$ siano sottospazi vettoriali. Determinare infine la dimensione di tali sottospazi vettoriali.

(i) $V = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid p(1) = p(\sqrt{2}) = 0\}$.

(ii) $W = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid \text{esiste } M > 0 \text{ tale che } p(\alpha) < M \text{ per ogni reale } \alpha > 0\}$.

(iii) $Z = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid p(n)^2 \leq n \text{ per ogni intero } n \geq 0\}$.

Esercizio 3. Si considerino lo spazio vettoriale complesso $V = \{M$ matrice 2×2 complessa, triangolare superiore$\}$ e l'applicazione lineare $F : V \to V$ definita da

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d & a + 5d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

(i) Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4+i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sia un autovettore per F. Se sì, calcolarne il corrispondente autovalore.

(ii) Dire se F ammetta un autovalore reale.

(iii) Calcolare il rango di F.

(iv) Dire se l'applicazione $(F^3 - 4F) : V \to V$ sia invertibile.