Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Prova scritta in modalità telematica - 1 luglio 2020

Soluzioni

Tre esercizi, 90 minuti di tempo

Occorre motivare le risposte.
Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^2 - z = |z|$.

Risoluzione: se $z = a + bi$, con $a, b, \in \mathbb{R}$, allora $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ e $z^2 - z = (a^2 - b^2 - a) + (2ab - b)i$. Quando z soddisfa $z^2 - z = |z|$, il primo membroè sicuramente reale, e quindi $2ab - b = 0$ da cui $b(2a - 1) = 0$. Pertanto, $b = 0$ oppure $a = 1/2$.

Nel primo caso, $z = a$ è reale, e si verifica facilmente che $z = 0$ oppure 2. Nel secondo caso $z = 1/2 + bi$, si ha $z^2 - z = 1/4 - b^2 - 1/2 = -b^2 - 1/4$ che è sempre un numero reale negativo e non può coincidere con $|z|$. In conclusione, le uniche soluzioni dell'equazione data sono 0 e 2.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t a coefficienti reali di grado al più 5. Dopo averne calcolato la dimensione, dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi V, W, Z di $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$ siano sottospazi vettoriali. Determinare infine la dimensione di tali sottospazi vettoriali.

(i) $V = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid p(1) = p(\sqrt{2}) = 0\}$.

(ii) $W = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid \text{esiste } M > 0 \text{ tale che } p(\alpha) < M \text{ per ogni reale } \alpha > 0\}$.

(iii) $Z = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \mid p(n)^2 \leq n \text{ per ogni intero } n \geq 0\}$.

Risoluzione:

I polinomi $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$ formano una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$, che ha quindi dimensione uguale a 6.

(i) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, l'operazione $ev_\alpha : \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \to \mathbb{R}$ di valutazione dei polinomi in α è lineare, come abbiamo visto più volte. Pertanto $V = \ker ev_1 \cap \ker ev_{\sqrt{2}}$ è sicuramente un sottospazio vettoriale.

La matrice associata all'applicazione lineare $e : \mathbb{R}[t]_{\leq 5} \to \mathbb{R}^2$ definita da $e(p) = (p(1), p(\sqrt{2}))$, usando la base precedente in $\mathbb{R}[t]_{\leq 5}$ e la base canonica di $\mathbb{R}^2$, è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 4 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2. Pertanto $V = \ker e$ ha dimensione $6 - 2 = 4$.

(ii) Il sottoinsieme W non è un sottospazio vettoriale. In effetti, il polinomio $p = -t$ assume solo valori negativi sui reali positivi e pertanto $p(\alpha) < 1$ per ogni $\alpha > 0$, da cui $p \in W$. Tuttavia $-p = t$ non appartiene a W, in quanto assume sui reali positivi valori positivi arbitrariamente grandi.

(iii) Se p è un polinomio non costante, p^2 è un polinomio di grado almeno 2 che assume solo valori non negativi e che quindi cresce sicuramente più che linearmente all'aumentare dell'argomento. Di conseguenza, Z contiene solamente polinomi costanti.

Tuttavia, se $p = c \in Z$ è costante, deve soddisfare $c^2 \leq n$ per ogni intero $n \geq 0$. In particolare, $c^2 \leq 0$ da cui $c = 0$. Possiamo concludere che l'unico elemento di Z è il polinomio nullo, e allora Z è un sottospazio vettoriale di dimensione 0.

Esercizio 3. Si considerino lo spazio vettoriale complesso $V = \{M \text{ matrice } 2\times 2 \text{ complessa, triangolare superiore}\}$ e l'applicazione lineare $F : V \to V$ definita da

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d & a+5d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

(i) Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4+i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sia un autovettore per F. Se sì, calcolarne il corrispondente autovalore.

(ii) Dire se F ammetta un autovalore reale.

(iii) Calcolare il rango di F.

(iv) Dire se l'applicazione $(F^3 - 4F) : V \to V$ sia invertibile.

Risoluzione:

(i) Sostituendo nella definizione di F si ottiene

$$F(A) = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 0 & 4+i \end{pmatrix},$$

che non è multiplo di A. Possiamo quindi affermare che A non è un autovettore di F.

(ii) Per calcolare il polinomio caratteristico di F, scriviamo innanzitutto la matrice associata a F utilizzando sia in partenza che in arrivo la base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a F rispetto a tale base è allora

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che M è una matrice reale 3×3 e dunque il suo polinomio caratteristico p_M è reale di grado 3, e ha quindi una radice reale. Poiché $p_F = p_M$, ne segue che F ha un autovettore reale.

(iii) La matrice associata a F che abbiamo scritto sopra ha determinante non nullo. Di conseguenza, F ha rango 3.

(iv) L'applicazione lineare $F^3 - 4F = F(F-2I)(F+2I)$ è invertibile se e solo se $0, 2, -2$ non sono autovalori di F. Calcoliamo facilmente il polinomio caratteristico di F:

$$p_F(x) = p_M(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 5 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 5x + 1.$$

Sostituendo, otteniamo $p_F(0) = 1$, $p_F(2) = 3$ e $p_F(-2) = -1$, e quindi $F^3 - 4F$ è invertibile.