Algebra lineare

Anno accademico 2019/20

Soluzioni della prova scritta del 21 luglio 2020

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $z^2 - \overline{z}^2 = 4\overline{z} - 4$.

Risposta: $z = 1$.

Soluzione.

Ponendo $z = x + iy$, *abbiamo*

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - \overline{z}^2 - 4\overline{z} + 4 = (x+iy)^2 - (x-iy)^2 - 4(x-iy) + 4 = \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) - (x^2 - y^2 - 2ixy) - 4x + 4iy + 4 = (4-4x) + (4ixy + 4iy) = \\ &= 4(1-x) + 4iy(x+1) \end{aligned}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 1 - x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

da cui $x = 1$ *e* $y = 0$. *L'unica soluzione è quindi* $z = 1$.

Esercizio 2. Sia M_3 lo spazio vettoriale reale delle matrici 3×3 a coefficienti reali.
Dopo averne calcolato la dimensione, dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi V, W, Z di M_3 siano sottospazi vettoriali e/o affini. Determinare infine la dimensione di tali sottospazi.

RISPOSTA: *M_3 ha dimensione* 9.

SOLUZIONE.

Una base di M_3 è data da $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 3\}$, che quindi contiene 9 elementi, dove E_{ij} è la matrice 3×3 con entrata 1 al posto (i, j) e con entrata 0 altrove.

(i) $V = \{A \in M_3 \mid \det A = 0\}$.

RISPOSTA: *V non è un sottospazio affine (e quindi nemmeno vettoriale).*

SOLUZIONE.

Infatti, le matrici E_{11} e $E_{22} + E_{33}$ appartengono a V. Tuttavia la combinazione affine $\frac{1}{2}E_{11} + \frac{1}{2}(E_{22} + E_{33}) = \frac{1}{2}I$ ha determinante $\frac{1}{8}$, e quindi non appartiene a V.

Alternativamente, si può osservare che V contiene l'elemento nullo di M_3, ed è quindi un sottospazio affine se e soltanto se è un sottospazio vettoriale. Ma allora si conclude come sopra osservando che E_{11} e $E_{22} + E_{33}$ appartengono a V, ma la loro somma no.

(ii) $W = \{A \in M_3 \mid \det A = 0, \operatorname{tr} A = 0\}$.

RISPOSTA: *W non è un sottospazio affine (e quindi nemmeno vettoriale).*

SOLUZIONE.

Infatti, le matrici $E_{11} - E_{22}$ e $2E_{22} - 2E_{33}$ appartengono a W. Tuttavia la combinazione affine $\frac{1}{2}(E_{11} - E_{22}) + \frac{1}{2}(2E_{22} - 2E_{33}) = \frac{1}{2}E_{11} + \frac{1}{2}E_{22} - E_{22}$ ha determinante $-\frac{1}{8}$, e quindi non appartiene a W.

Alternativamente, si può osservare che W contiene l'elemento nullo di M_3, ed è quindi un sottospazio affine se e soltanto se è un sottospazio vettoriale. Ma allora si conclude come sopra osservando che $E_{11} - E_{22}$ e $E_{33} - E_{22}$ appartengono a W, ma la loro differenza no.

(iii) $Z = \{A \in M_3 \mid A - 3A^t = I\}$.

RISPOSTA: *Z non è un sottospazio vettoriale, ma è un sottospazio affine di dimensione* 0.

SOLUZIONE.

La matrice $A = -\frac{1}{2}I$ appartiene a Z. Dunque Z è un sottospazio affine se e solo se

$$\vec{Z} = \{X \in M_3 \mid X - 3X^t = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale. Questo è vero perché l'applicazione $M_3 \to M_3$ *definita da* $X \mapsto X - 3X^t$ *è lineare. Per definizione* Z *ha la stessa dimensione di* $\vec{Z}$. *Ora,* $X \in \vec{Z}$ *se e solo se* $X_{ij} = 3X_{ji}$ *per ogni* $1 \leq i, j, \leq 3$. *In particolare,* $X \in \vec{Z}$ *se e solo se*

$$\begin{cases} X_{ii} = 3X_{ii} & \textit{per ogni } i = 1,2,3 \\ X_{ij} = 3X_{ji} = 9X_{ij} & \textit{per ogni } i \neq j \end{cases}$$

da cui $X = 0$. *Ne segue che* $\vec{Z} = \{0\}$ *e* $Z = \{-\frac{1}{2}I\}$ *hanno dimensione* 0.

Esercizio 3. Scrivere la matrice associata a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, utilizzando la base canonica sia in partenza che in arrivo, sapendo che

- il vettore $(1,1,1)^t$ è un autovettore di T di autovalore 3;
- l'autospazio di T relativo all'autovalore 0 ha equazione cartesiana $x + y + z = 0$.

Dire infine se l'endomorfismo $T^3 - \mathrm{Id}$ sia invertibile.

Risposta: *L'endomorfismo* $T^3 - \mathrm{Id}$ *è invertibile e* $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

Sia V_3 *il sottospazio di dimensione* 1 *di* $\mathbb{R}^3$ *generato da* $v_3 := (1,1,1)^t$ *e sia* V_0 *il sottospazio di equazione* $x+y+z=0$, *che ha per esempio base data dai due vettori* $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,1,-1)$, *e quindi ha dimensione* 2. *Poiché* $v_3 \notin V_0$, *segue che* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$. *L'applicazione* T *è dunque univocamente determinata dalle condizioni* $T(v_1) = T(v_2) = 0$ *e* $T(v_3) = 3v_3$. *Ne segue che la matrice che rappresenta* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *in partenza e in arrivo è*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e T *ha autovalori* 0 *e* 3. *Dunque* T^3 *ha autovalori* 0 *e* 27, *e* $T^3 - \mathrm{Id}$ *ha autovalori* -1 *e* 26. *Ne segue che* $T^3 - \mathrm{Id}$ *è invertibile.*

Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *e ricordiamo che* $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. *Inoltre*

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo quindi $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, *che è l'inversa di* $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

e dunque

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$