Algebra lineare

ANNO ACCADEMICO 2019/20

Prova scritta in modalità telematica - 11 settembre 2020

Tre esercizi, 90 minuti di tempo

Occorre motivare le risposte.
Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Esercizio 1. Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino l'equazione $\cos|z| + i \sin|z| = z^2$.

Risoluzione:

Il numero complesso a primo membro ha norma complessa 1 e quindi $|z^2| = 1$ da cui $|z| = 1$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $z^2 = \cos(1) + i \sin(1)$ le cui due soluzioni sono $z = \pm(\cos(1/2) + i \sin(1/2))$.

Esercizio 2. Sia M_3 lo spazio vettoriale reale delle matrici 3×3 a coefficienti complessi. Dopo aver calcolato la dimensione di M_3, dire, motivando la risposta, quali dei seguenti sottoinsiemi V, W, Z di M_3 siano sottospazi affini. Infine determinarne la dimensione di ciascun sottospazio affine e dire se siano sottospazi vettoriali.

(i) $V = \{A \in M_3 \mid A \cdot A^T = 0\}$.

(ii) $W = \left\{ A \in M_3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ è autovettore di } A \text{ di autovalore } 9i \right\}$.

(iii) $Z = \{A \in M_3 \mid \text{la prima riga e la prima colonna di } A \text{ sono linearmente dipendenti}\}$.

Risoluzione:

La dimensione complessa di M_3 è 9 e la sua dimensione reale è quindi $2 \cdot 9 = 18$.

(i) V contiene la matrice nulla ed è quindi un sottospazio affine di M_3 esattamente quando ne è un sottospazio vettoriale. Ad ogni modo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartengono a V, al contrario della loro somma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si vede facilmente che

$$U = \left\{ A \in M_3 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di M_3. Inoltre, due elementi di M_3 appartengono a W se e solo se la loro differenza giace in U. È sufficiente allora esibire un elemento di W per concludere che W un sottospazio affine di giacitura U. La matrice

$$\begin{pmatrix} 9i & 0 & 0 \\ 18i & 0 & 0 \\ 27i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una possibile scelta, come si verifica facilmente.

La dimensione di W coincide, per definizione, con la dimensione di U. Si vede che gli elementi di U sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} -2a - 3b & a & b \\ -2c - 3d & c & d \\ -2e - 3f & e & f \end{pmatrix}$$

che si esprime facilmente come combinazione lineare complessa di 6 matrici linearmente indipendenti. In conclusione, la dimensione complessa di U è 6, e quella reale 12.

(iii) Come nel primo punto, Z contiene la matrice nulla e dobbiamo quindi solo verificare se Z sia un sottospazio vettoriale di M_3.

Ad ogni modo, le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartengono a Z, ma la loro somma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no.

Esercizio 3. Considerare l'insieme $\mathcal{A}$ di tutte le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfino $T^3 = 2T^2$.

(a) Quali sono le possibili tracce di tali T in $\mathcal{A}$?

(b) È vero che, se $T \in \mathcal{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathrm{tr}(T) > 3$?

(c) È vero che, se $T \in \mathcal{A}$ soddisfa $\mathrm{tr}(T) > 3$, allora T è diagonalizzabile?

(d) È vero che, per ogni $T \in \mathcal{A}$, l'applicazione $T^2 - 2I$ ha rango 3?

Risoluzione:

Un endomorfismo lineare T di $\mathbb{R}^3$ appartiene ad $\mathcal{A}$ esattamente quando annulla il polinomio $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$. Il suo polinomio minimo deve quindi dividere $x^2(x-2)$ e le radici complesse del suo polinomio caratteristico possono essere solamente 0 e 2, con le opportune molteplicità.

(a) Poiché la traccia di T è la somma delle radici (complesse) del suo polinomio caratteristico, prese con la corrispondente molteplicità, essa può assumere solo i valori $0+0+0=0$, $0+0+2=2$, $0+2+2=4$, $2+2+2=6$. Per mostrare che questi valori siano effettivamente ottenibili è sufficiente esibire le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cui sono associati endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che appartengono a $\mathcal{A}$ e possiedono le tracce desiderate.

(b) La matrice nulla è diagonalizzabile, appartiene ad $\mathcal{A}$ ma ha traccia $0 < 3$.

(c) Un endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio minimo si spezza nel prodotto di fattori lineari distinti. Sappiamo che il polinomio minimo di $T \in \mathcal{A}$ deve dividere $x^2(x-2)$; se T non è diagonalizzabile, allora nel polinomio minimo di T devono comparire almeno due fattori x. Ma in tal caso la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è almeno 2 e la traccia non può superare 3. In conclusione, se $\mathrm{tr}(T) > 3$ allora $T \in \mathcal{A}$ è necessariamente diagonalizzabile.

(d) Si ha $T^2 - 2I = (T - \sqrt{2} \cdot I)(T + \sqrt{2} \cdot I)$. Entrambi i fattori a secondo membro sono endomorfismi invertibili di $\mathbb{R}^3$, in quanto $\pm\sqrt{2}$ non sono autovalori di T. Ma allora $T^2 - 2I$ è prodotto (= composizione) di endomorfismi invertibili ed è quindi invertibile, cioè di rango 3.