GEOMETRIA PER FISICI 2018-19
ELENCO DEGLI ARGOMENTI TRATTATI DURANTE LE LEZIONI

1. MARTEDÌ 25 SETTEMBRE 2018

Informazioni organizzative. Due esempi di linearità: la funzione di spesa che associa alle quantità comprate la cifra pagata; l'applicazione che associa alle coordinate di un punto nel piano le coordinate del punto ottenuto ruotando di 45 gradi in senso antiorario attorno all'origine.

Linguaggio. Insiemi ed elementi; appartenenza; sottoinsiemi ed inclusione; l'insieme vuoto. Unione, intersezione e differenza di insiemi; differenza simmetrica. Applicazioni e composizione. Esempi di applicazioni: l'identità; l'inclusione; altri esempi. Applicazioni iniettive e suriettive. [Cap. 1, pp. 2-6]

2. MERCOLEDÌ 26 SETTEMBRE 2018

Applicazioni iniettive, suriettive, invertibili. Riformulazioni del concetto di identità. Un'applicazione invertibile fornisce una corrispondenza biunivoca. La composizione di applicazioni è associativa. Inversa di un'applicazione; se un'applicazione possiede un'inversa, allora è iniettiva e suriettiva; l'inversa di un'applicazione invertibile è unica.

Numeri reali e loro proprietà. Il concetto di campo – e en passant i concetti di gruppo abeliano e di anello commutativo; i numeri reali formano un campo. Esempi di campo: i numeri reali, i numeri razionali, il campo con due elementi. [Cap. 1, pp. 6-12]

Numeri complessi. Operazioni tra numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria. Elementi neutri additivi e moltiplicativi dei numeri complessi. I numeri complessi della forma $a + 0i$ costituiscono una copia del campo reale. Inverso additivo e moltiplicativo di numeri complessi.

Piano di Argand-Gauss. Interpretazione geometrica della somma di numeri complessi. Complesso coniugato e norma complessa; la norma complessa coincide con il valore assoluto sui numeri reali. La norma complessa è moltiplicativa: $|zw| = |z||w|$. Prodotto di numeri complessi di norma 1; l'angolo formato da zw con l'asse reale positivo è la somma degli angoli formati da z e w.

Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. [Cap. 4, pp. 77-81]

P1. VENERDÌ 28 SETTEMBRE 2018

Gli insiemi $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, $\mathbb{R}$ dei numeri reali e proprietà delle operazioni in essi definite. Irrazionalità di $\sqrt{2}$. Numeri complessi: ancora sulla definizione, somma e prodotto. Parte reale e parte immaginaria. I numeri complessi di parte immaginaria nulla si sommano e si moltiplicano come i numeri reali. Numeri immaginari puri. Somma e prodotto sono commutative e associative; il prodotto distribuisce rispetto alla somma; $0+0i$ è l'elemento neutro della somma, mentre $1+0i$ è l'elemento neutro del prodotto. Piano di Argand-Gauss. La somma di numeri complessi è data dalla regola del parallelogramma. Coniugazione complessa: il coniugato del coniugato di z è z; la coniugazione complessa commuta con somma e prodotto. Norma complessa: coincide con il valore assoluto nel caso reale; disuguaglianza triangolare. La norma complessa di zw è il prodotto delle norme complesse di z e di w. Notazione polare di numeri complessi: norma e argomento. Prodotto di numeri complessi di norma 1: gli argomenti si sommano (a meno di multipli di 2π); formule di somma per seno e coseno; notazione esponenziale o di Eulero. Inverso di un numero complesso diverso da 0 in forma cartesiana e polare. I numeri complessi formano un campo. Calcolo delle radici di $z^3 - 1$ in due modi. Calcolo delle radici di $z^2 - i$. [Cap. 4, pp. 77-83]

3. MARTEDÌ 2 OTTOBRE 2018

Che cos'è una retta, che cos'è un piano? Traslazioni nel piano e loro proprietà: costituiscono un gruppo abeliano; agiscono in modo semplicemente transitivo sul piano; sono moltiplicabili per numeri reali. Concetto di spazio vettoriale (reale). Come indico una traslazione? Vettori applicati, equipollenza e vettori liberi. La composizione tra traslazioni si traduce nella somma tra vettori attraverso la regola del parallelogramma. Struttura di spazio vettoriale dei vettori liberi.

I punti del piano rimangono identificati con le traslazioni una volta che sia stata fissata un'origine; rimangono identificati alle coppie di numeri reali una volta che sia stato fissato un riferimento affine. Esempi di spazi vettoriali reali: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$, le funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Uno spazio affine è un insieme con un gruppo di traslazioni, che ha struttura di spazio vettoriale reale, che vi agisce in modo semplicemente transitivo.

Esempi di parametrizzazioni di rette e piani in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Esempi di equazioni cartesiane. Gradi di libertà, vincoli e dimensione. Gli oggetti geometrici *dritti* ammettono parametrizzazioni ed equazioni cartesiane di primo grado. [Cap. 2]

4. Mercoledì 3 ottobre 2018

Equazioni di primo grado in un'incognita: manipolazioni che cambiano e non cambiano l'insieme delle soluzioni. Esempi di sistemi di equazioni lineari in più incognite: vari metodi di risoluzione e manipolazioni che cambiano e non cambiano l'insieme delle soluzioni. Un sistema di equazioni lineari può avere o non avere soluzioni; quando ne ha, può esservi una sola soluzione oppure più di una. Descrizione matriciale di un sistema di equazioni lineari. Una breve presentazione del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan quando non ci sono problemi. [Cap. 3, pp. 40-49]

P2. Venerdì 5 ottobre 2018

Enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha n radici complesse, se contate con la loro molteplicità. Teorema di Ruffini. Esistenza di una radice reale per equazioni a coefficienti reali di grado dispari. Esempi di radici n-esime dell'unità e formula generale. [Cap. 4, pp. 84-86]

Esempi numerici di sistemi lineari 2×2 con una, infinite o nessuna soluzione. Commento sulla geometria analitica dei sistemi lineari portati ad esempio.

5. Martedì 9 ottobre 2018

Il procedimento di eliminazione: descrizione algoritmica; pivot. Al termine del procedimento, la matrice ha una forma a gradoni: se compare un pivot sulla colonna dei termini noti, non ci sono soluzioni; cosa succede se non ci sono pivot su tale colonna? Vari esempi. Se un sistema lineare ha soluzione, tale soluzione è unica una volta fissato il valore delle incognite relative a colonne senza pivot. La soluzione è unica se vi sono tante incognite quanti pivot ed ammette sempre una parametrizzazione lineare in funzione delle incognite relative a colonne senza pivot. Un esempio esotico di spazio vettoriale. [Cap. 6, pp. 108-113]

6. Mercoledì 10 ottobre 2018

Sottospazi vettoriali: due definizioni equivalenti. Esempi: sottospazi banali; sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (non rigorosamente); somma e intersezione di sottospazi vettoriali; insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Sottospazio generato da un sottoinsieme finito o infinito. Il concetto di combinazione lineare. [Cap. 4, pp. 57-63]

P3. Venerdì 12 ottobre 2018

Esempi numerici di sistemi 3×2 con una, infinite e nessuna soluzione e analoghe considerazioni su di esse. Eliminazione di Gauss su tutti i sistemi lineari portati ad esempio e sulle rispettive matrici A e B. Pivots e rango di una matrice. Confronto tra i ranghi di A e di B e l'esistenza o meno di soluzioni. Il caso di unica soluzione. Sistemi lineari "triangolari superiori" di tre equazioni in tre incognite. Hanno soluzione unica se i tre coefficienti sulla diagonale principale sono tutti non nulli. Se qualche coefficiente sulla diagonale principale è non nullo, non vi sono soluzioni, oppure le soluzioni sono infinite. Procedimento di eliminazione di Gauss: rapida spiegazione del procedimento algoritmico. Il procedimento di eliminazione porta un sistema di tre equazioni in tre incognite in un sistema triangolare superiore equivalente; pertanto, ogni sistema (lineare) di tre equazioni in tre incognite (reali) ha infinite soluzioni, oppure una sola, oppure nessuna. Esempi di sistemi lineari 3×3 con una, infinite e nessuna soluzione e rispettive interpretazioni geometriche. Linguaggio delle combinazioni lineari applicato alle equazioni di un sistema. [Cap. 6]

7. Martedì 16 ottobre 2018

Richiami sulle combinazioni lineari. Combinazioni lineari di combinazioni lineari sono combinazioni lineari: più precisamente, se degli elementi $v_1, \ldots, v_n \in V$ generano un sottospazio che contiene generatori di V, allora $v_1, \ldots, v_n$ generano v. Esempi di vettori in $\mathbb{R}^2$ linearmente dipendenti e indipendenti. Definizione di dipendenza e indipendenza lineare. Nuovi esempi. Se un vettore si scrive come combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti, i coefficienti della combinazione lineare sono univocamente determinati. Proprietà dell'indipendenza lineare: un vettore è linearmente indipendente se e solo se è non nullo; due vettori sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno dei due è multiplo dell'altro; n vettori sono linearmente indipendenti se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri; se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e w non appartiene al sottospazio che generano, allora $v_1, \ldots, v_n, w$ sono linearmente indipendenti. L'insieme vuoto è linearmente indipendente. Definizione di base: le basi sono insiemi linearmente indipendenti massimali. Coordinate di un vettore in una base. Interpretazione dei sistemi di equazioni lineari attraverso i concetti di combinazione e indipendenza lineare. [Cap. 4, pp. 64-68]

8. Mercoledì 17 ottobre 2018

Da ogni insieme (finito) di generatori si estrae una base; ogni insieme (finito) linearmente indipendente si estende ad una base. Se V ha una base composta da n elementi e contiene k elementi linearmente indipendenti, allora $k \leq n$. Due basi (finite) dello stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi: il concetto di dimensione. In uno spazio vettoriale di dimensione n, n elementi sono linearmente indipendenti se e solo se generano se e solo se sono una base. Meno di n elementi in uno spazio vettoriale di dimensione n non generano. Se $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale, allora $\dim U \leq \dim V$, e l'uguaglianza vale esattamente quando $U = V$. Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (versione rigorosa).

Formula di Grassmann. Due piani distinti per l'origine in $\mathbb{R}^3$ si intersecano in una retta. [Cap. 4, pp. 68-75]

P4. VENERDÌ 19 OTTOBRE 2018

Ancora sul procedimento di eliminazione di Gauss per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Se al termine dell'eliminazione vi è un pivot sull'ultima colonna (quella dei termini noti), allora il sistema non ha soluzioni. Se al termine dell'eliminazione non vi sono pivot sull'ultima colonna, abbiamo invece una procedura per elencare tutte le soluzioni: è sufficiente portare a secondo membro le incognite relative alle colonne senza pivot e risolvere, al variare dei valori che assumono, il sistema triangolare superiore risultante. Vari esempi. Un esempio di sistema lineare facilmente risolvibile con manipolazioni opportune (variazioni sul tema di eliminazione de Gauss). Esempi di sistemi lineari 3×3 con una, infinite e nessuna soluzione e rispettive interpretazioni geometriche. Linguaggio delle combinazioni lineari applicato alle equazioni di un sistema. Interpretazione di un sistema lineare come ricerca dei coefficienti che permettono di scrivere la colonna dei termini noti come combinazione lineare delle colonne dei coefficienti delle incognite. Enunciato del teorema di Rouche'-Capelli. Sistemi lineari non omogenei e sistemi lineari omogenei associati. Il Teorema di struttura (Prop. 5.1 del libro). Esempi.

9. MARTEDÌ 23 OTTOBRE 2018

Richiami. Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha dimensione finita. Un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita: $\mathbb{R}[x]$.

Formula di Grassmann: dimostrazione. Esempi di piani in $\mathbb{R}^4$ che si intersecano in un solo punto. Se $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$, allora $\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$: vari esempi. Somma diretta di due sottospazi vettoriali; somma diretta di più sottospazi vettoriali: alcuni esempi e controesempi.

Lo spazio vettoriale delle successioni reali: ha dimensione infinita; il suo sottospazio delle successioni convergenti: ha ancora dimensione infinita. Un sottospazio vettoriale di dimensione 2 e una sua base. [Cap. 4, pp. 75-77]

10. MERCOLEDÌ 24 OTTOBRE 2018

Due basi diverse dello spazio vettoriale $\mathcal{F}$ delle successioni (a_n) che soddisfano le condizioni $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Ogni elemento $(a_n) \in \mathcal{F}$ soddisfa $a_n = c2^n + d3^n$ per una scelta opportuna di $c, d \in \mathbb{R}$. Una variante: formula chiusa per i termini della successione di Fibonacci.

Applicazioni lineari. Esempi: l'identità, l'applicazione nulla, la composizione di applicazioni lineari, somma e multiplo di applicazioni lineari. L'operazione di derivata è lineare. Gergo: omomorfismi, isomorfismi, endomorfismi, epimorfismi, monomorfismi, automorfismi. Applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: si ottengono tutte moltiplicando (a sinistra) per una matrice $m \times n$. Esempi.

Nucleo e immagine di applicazioni lineari: sono sottospazi vettoriali. [Cap. 5, pp. 92-98]

P5. VENERDÌ 26 OTTOBRE 2018

Spazio vettoriale delle matrici quadrate. Base canonica e dimensione. I sottospazi vettoriali delle matrici simmetriche e antisimmetriche, loro dimensioni e loro basi naturali. L'endomorfismo di trasposizione. Decomposizione di $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ nella somma diretta dei sottospazi U e W delle matrici risp. simmetriche e antisimmetriche. Rispettive basi naturali. Esempio di un suttoinsieme che non è un sottospazio vettoriale: le matrici di rango fissato.

P6. MERCOLEDÌ 31 OTTOBRE 2018

Lo spazio delle matrici quadrate complesse come spazio vettoriale complesso e come spazio vettoriale reale. Rispettive basi canoniche e dimensioni. Matrici hermitiane e antihermitiane. Esempi: le matrici di Pauli e il loro prodotto per l'unità immaginaria. Gli endomorfismi di trasposizione e di trasposizione coniugata. Decomposizione dello spazio vettoriale reale $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ nella somma diretta dei sottospazi reali U e W delle matrici risp. hermitiane e antihermitiane. Computo delle rispettive dimensioni.

11. MARTEDÌ 6 NOVEMBRE 2018

Richiami: le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono tutte della forma L_A per un'opportuna matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $L_A = L_B$ solo se $A = B$. Un'applicazione lineare $T : V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker T = \{0\}$. Teorema di struttura: se $T : V \to W$ è lineare, le soluzioni dell'equazione $T(v) = w_0$ sono tutte e sole quelle che si ottengono sommando ad una (eventuale) soluzione v_0 gli elementi di $\ker T$.

Se $T : V \to W$ è lineare, allora $\dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\, T = \dim V$; rango di un'applicazione; T è iniettiva ha rango $\dim V$ ed è suriettiva se ha rango $\dim W$; se $\dim V = \dim W$, T è iniettiva se e solo se è suriettiva. Può esservi un'applicazione lineare invertibile tra due spazi vettoriali solo se hanno la stessa dimensione.

L'applicazione $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$; è iniettiva se e solo se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti; è suriettiva quando sono generatori; è invertibile quando sono una base. Una base è un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Somme dirette. [Cap. 5, pp. 98-100]

12. MERCOLEDÌ 7 NOVEMBRE 2018

Ancora sulla somma diretta. (Quasi) tutto sul rango: rango di una matrice; il rango di una matrice è la dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle sue colonne; teorema di Rouché-Capelli; il rango di una matrice è il numero dei pivot al termine del procedimento di eliminazione.

Un nuovo utilizzo del procedimento di eliminazione: le manipolazioni dell'eliminazione di Gauss non modificano il sottospazio vettoriale generato dalle righe della matrice. Il rango di una matrice è anche la dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle sue righe. [Cap. 5, pp. 100-102]

P7. Venerdì 9 novembre 2018

Esercizi su sottoinsiemi e su sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale. Relative equazioni parametriche e equazioni cartesiane. Esercizi sugli endomorfismi, in particolare la derivazione sullo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due, e la trasposizione sullo spazio delle matrici quadrate.

13. Martedì 13 novembre 2018

La composizione di applicazioni lineari è lineare; $L_A \circ L_B$ è del tipo L_M per un'opportuna scelta della matrice C: prodotto di matrici. Se $M = AB$, allora M si calcola da A, B moltiplicandole righe per colonne. Proprietà del prodotto righe per colonne: $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$. Attenzione: in generale $AB \neq BA$, $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Matrice identità. $AI = IA = A$. Matrici invertibili: sono quadrate. La matrice identità è invertibile. Una matrice quadrata $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n. [Cap. 7, pp. 128-137]

14. Mercoledì 14 novembre 2018

Calcolo dell'inversa di una matrice; se A, B sono matrici quadrate e $AB = I$ allora B è l'inversa di A.

Matrici di cambiamento di base. Matrice associata ad un'applicazione lineare, una volta fatta una scelta di una base in partenza e una in arrivo. [Cap. 7, pp. 137-138; cap. 8]

P8. Venerdì 16 novembre 2018

Esercizi su nucleo e immagine di un'applicazione lineare, determinazione da una matrice associata delle rispettive equazioni parametriche e cartesiane. Osservazioni sulle varie definizioni di rango. Esercizi sulla formula di Grassmann.

15. Martedì 20 novembre 2018

Cambiamenti di base: fissiamo le notazioni.

Area di un parallelogramma nel piano: è una funzione bilineare e alternante. Un determinante è una funzione multilineare e alternante definita sulle matrici $n \times n$ a coefficienti in un campo, normalizzata in modo che valga 1 sull'identità; non è detto che il determinante esista.

Se esiste, si può calcolare attraverso l'eliminazione di Gauss; in particolare esiste al più una funzione determinante sulle matrici $n \times n$. Determinante di matrici $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$. Varie affermazioni, per il momento senza dimostrazione: $\det A = \det A^t$, sviluppo di Laplace lungo righe e lungo colonne, il determinante è multilineare e alternante anche rispetto alle colonne. [Cap. 9]

16. Mercoledì 21 novembre 2018

Esistenza del determinante: definizione ricorsiva attraverso lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna. Sviluppo di Laplace lungo righe e colonne: determinante di matrici triangolari superiori. Il determinante della matrice coincide con quello della sua trasposta: determinante di matrici triangolari inferiori. Espressione del determinante come sommatoria sulle permutazioni: contiene $n!$ addendi, ciascuno dei quali è prodotto di n coefficienti della matrice scelti in modo che siano su righe e colonne differenti. Interpretazione geometrica del determinante. Le righe (colonne) di una matrice quadrata A sono linearmente dipendenti se e solo se $\det A = 0$. [Cap. 9, pp. 162-175]

P9. Venerdì 23 novembre 2018

Esercitazione in classe.

P10. Martedì 27 novembre 2018

Correzione dell'esercitazione scritta. Proprietà del determinante.

17. Mercoledì 28 novembre 2018

Riassunto delle proprietà del determinante già mostrate. Formula di Binet e suo significato geometrico in termini di rapporto tra volumi. Formule di Cramer. Calcolo del rango di una matrice (possibilmente non quadrata) per mezzo del determinante. Il rango di una matrice è l'ordine massimo di un minore non nullo. Enunciato del teorema degli orlati. [Cap. 9, pp. 175-179]

18. Venerdì 30 novembre 2018

Dimostrazione del teorema degli orlati. Alcune applicazioni: calcolo del rango di una matrice dipendente da parametro; equazione cartesiana di un piano e di una retta in $\mathbb{R}^3$.

Introduzione alla diagonalizzazione di endomorfismi lineari: corrisponde al problema di disaccoppiare i gradi di libertà nella descrizione in coordinate di un operatore lineare. Un esempio in $\mathbb{R}^2$; un vecchio esempio sulle successioni in sapore Fibonacci.

P11. Martedì 4 dicembre 2018

Rivisitazione dei sistemi lineari. Inversa di una matrice utilizzando i complementi algebrici. Regola di Cramer e sua applicazione ad ogni sistema lineare risolvibile. Esempi e esercizi.

19. Mercoledì 5 dicembre 2018

Il problema della diagonalizzazione di un endomorfismo lineare. Autovalori, autovettori, autospazi. $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V composta da soli autovettori di T. Vari esempi nel caso $V = \mathbb{R}^2$. Polinomio e equazione caratteristica. Un endomorfismo può non essere diagonalizzabile sia perché l'equazione caratteristica non ha abbastanza soluzioni, nemmeno se contate con la loro molteplicità, sia perché degli autovalori possono avere molteplicità superiore a 1, senza che i corrispondenti autospazi abbiamo dimensione sufficientemente alta.

20. Venerdì 7 dicembre 2018

Riassunto: autovalori, autospazi, autovettori di un endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Uno scalare λ è un autovalore di T se e solo se $\det(T - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$; il determinante si calcola scegliendo una base (da utilizzare in partenza e in arrivo) e scrivendone la matrice: per Binet il polinomio che ne risulta non dipende dalla scelta della base.

Struttura del polinomio caratteristico di $T : V \to V$: ha grado n, ed è della forma $\pm(x^n - \mathrm{Tr}(T)x^{n-1} + \dots \pm \det(T)$, dove la *traccia* $\mathrm{Tr}(T)$ indica la somma degli elementi sulla diagonale principale della matrice associata a T.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore: sono entrambe ≥ 1, e la molteplicità geometrica non supera la molteplicità algebrica. L'endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori coincide con $\dim V$. Criteri di non diagonalizzabilità: T è sicuramente non diagonalizzabile se anche solo un autovalore ha molteplicità geometrica inferiore alla sua molteplicità algebrica; o se il polinomio caratteristico non si fattorizza nel prodotto di polinomi di primo grado (cioè *le sue radici non sono tutte nel campo*).

La somma di autospazi di T è diretta. $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori coincide con $\dim V$.

P12. Martedì 11 dicembre 2018

Studio di tre operatori lineari: la rotazione di 90 gradi nel piano vettoriale reale e complesso numerici, la derivazione nello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3, la trasposizione nello spazio delle matrici quadrate di ordine 3. Loro autovalori, autiovettori, loro diagonalizzabilità o non diagonalizzabilità.

21. Mercoledì 12 dicembre 2018

Calcolo del determinante di una matrice 5×5 in due modi. La traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori, contati con la loro molteplicità; il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori, contati con la loro molteplicità. Un terzo modo di calcolare il determinante della matrice.

Calcolo del polinomio caratteristico e degli autovalori complessi di una matrice 3×3, che si scoprirà poi essere ortogonale; l'unico autovalore reale è 1, mentre gli altri due autovalori sono complessi coniugati di norma complessa 1.

Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: definizione geometrica; è bilineare e simmetrico. Teorema di Pitagora: $u \cdot u$ è il quadrato della lunghezza di u. Prodotto scalare canonico come prodotto matriciale $u \cdot v = u^t v$. Definizione di matrice ortogonale reale: le matrici ortogonali sono un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; le matrici ortogonali hanno determinante ± 1. Una matrice quadrata è ortogonale se e solo se le sue righe (equivalentemente: colonne) hanno lunghezza 1 e sono a due a due ortogonali tra loro. La matrice 3×3 precedentemente considerata è ortogonale.

Gli unici autovalori reali che una matrice ortogonale possa avere sono ± 1. Matrici 2×2 ortogonali: di determinante 1 e di determinante -1. Molto rapidamente: una matrice 3×3 ortogonale di determinante 1 ha 1 come autovalore; la restrizione al piano ortogonale alla retta generata da un 1-autovettore è una rotazione attorno all'origine; la traccia di una matrice ortogonale di determinante 1 vale $1 + 2\cos\theta$, dove θ è l'angolo di rotazione.

P13. Venerdì 14 dicembre 2018

Prodotti scalari in spazi vettoriali reali. Prodotti scalari non degeneri e prodotti scalari positivi. Esempi: prodotto scalare canonico, prodotti scalari in spazi di polinomi, di matrici quadrate, di funzioni continue. Prodotto scalare euclideo canonico in $\mathbb{C}^n$. Norma di un vettore. Basi ortogonali e basi ortonormali.

P14. Martedì 18 dicembre 2018

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Uso del simbolismo matriciale per cambiamenti di base e rappresentazione matriciale di applicazioni lineari, operatori lineari e prodotti scalari. Operatori ortogonali e operatori simmetrici in spazi vettoriali euclidei. Loro rappresentazione matriciale in basi ortonormali.

P15. Mercoledì 19 dicembre 2018

Autovalori reali per endomorfismi simmetrici in spazi vettoriali euclidei. Ortogonalità tra autovettori relativi ad autovalori distinti. Teorema spettrale reale e decomposizione spettrale di uno spazie vettoriale euclideo rispetto a un operatore simmetrico. Diagonalizzabilità ortogonale di una matrice simmetrica reale. Operatori ortogonali e matrici ortogonali, esempi di non diagonalizzabilità. Il caso della dimensione dispari.

22. Venerdì 21 dicembre 2018

Struttura di $\mathrm{O}(2), \mathrm{SO}(2), \mathrm{SO}(3)$. Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$: definizione e interpretazione geometrica. Generatore infinitesimale di una rotazione.

Struttura di $\mathrm{O}(1,1)$ e boost di Lorentz.

P16. Martedì 8 gennaio 2019

Forme sesquilineatri e forme hermitiane in uno spazio vettoriale complesso. Prodotti scalari hermitiani definiti positivi. Spazi vettoriali hermitiani. Il prodotto scalare hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$. Operatori unitari e operatori hermitiani in spazi vettoriali hermitiani. Loro rappresentazioni in basi ortonormali mediante matrici risp. unitarie e hermitiane. Le matrici di Pauli sono sia unitarie che hermitiane.

23. Mercoledì 9 gennaio 2019

Operatori autoaggiunti su spazi euclidei reali e complessi. La matrice associata ad un operatore autoaggiunto è sempre simmetrica (hermitiana) se scritta rispetto ad una base ortonormale, ma può non esserlo rispetto ad altre basi: un esempio.

Perché si usano forme sesquilineari hermitiane sui complessi? Una forma $\mathbb{C}$-bilineare simmetrica non ha speranza di essere definita positiva, per vari motivi.

Matrici diagonali commutano tra loro. Operatori che sono diagonalizzabili nella stessa base commutano tra loro. Operatori diagonalizzabili che commutano sono diagonalizzabili nella stessa base: una prima dimostrazione (imprecisa); un operatore diagonalizzabile ha sempre restrizione diagonalizzabile ad un sottospazio invariante. Chiacchiere quantistiche.

Con cosa si sostituisce la diagonalizzazione, quando un operatore lineare non è diagonalizzabile? Triangolarizzabilità di endomorfismi complessi: un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita ha sempre almeno un autovettore. Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita si triangolarizza in una base ortonormale (grazie a Gram-Schmidt, rispetto a qualsiasi prodotto scalare dato).

P17. Venerdì 11 gennaio 2019

Gli autovalori degli operatori hermitiani sono reali e autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Diagonalizzabilità degli operatori hermitiani e degli operatori unitari. Diagonalizzabilità delle corrispondenti matrici. Un esempio numerico di diagonalizzazione.

P18. Martedì 15 gennaio 2019

Esercitazione scritta di riepilogo sulla seconda parte del corso. Un teorema per concludere: i poliedri regolari in dimensione 3 e i politopi regolari in dimendione 4, cenni sulla dualità e sulla caratteristica di Eulero-Poincaré.

24. Mercoledì 16 gennaio 2019

Correzione dell'esercitazione in classe del 16 gennaio. Un criterio per stabilire se un prodotto scalare reale sia definito positivo. La traccia è lineare e $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Se $AB - BA$ è un multiplo dell'indentità, e A, B sono matrici $n \times n$, allora $AB - BA = 0$. Le commutazioni canoniche $qp - pq = i\hbar$ impediscono di rappresentare p, q come matrici $n \times n$.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it