Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canali A – C, L–Pa, Pb – Z

Durata: 2 ore e 30 minuti

Alessandro D'Andrea Simone Diverio Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

21 gennaio 2019

Esercizio 1. Dire per quali valori del parametro reale k il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 1 \\ (1-k^2)x + 3k\,z = 2k-1 \\ (k^2+1)x + (k+1)y - 2z = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 2 e sia

$$T\colon \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$$

l'applicazione lineare definita da

$$T(p)(t) = p\big(\sqrt{2}\big)t^2 + p(0)t + p'(t).$$

Verificare che T non è un isomorfismo. Determinare una base di $\ker T$.

Esercizio 3. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine due ad elementi complessi. Stabilire, giustificando ogni risposta, se i seguenti sottoinsiemi $U_1, \ldots, U_7 \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, e in caso affermativo indicarne la dimensione.

(i) $U_1 = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 0\}$.

(ii) $U_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$.

(iii) $U_3 = U_1 \cap U_2$.

(iv) $U_4 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{12} = a_{21} = 0\}$.

(v) $U_5 = U_1 \cap U_4$.

(vi) $U_6 = \{A \in V \mid \exists\, C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ tale che $C^{-1}AC \in U_4\}$.

(vii) $U_7 = \{A \in V \mid p_A(\lambda)$ ha tutte le radici reali$\}$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ munito del prodotto scalare definito positivo $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Siano $U, V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(1) = 0\}, \quad V = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\}.$$

Determinare una base per $W = U \cap V$, la dimensione di $U + V$, ed una base per il sottospazio $W^\perp$.

Esercizio 5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$, di autovettori.