Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canali A–C, L–Pa, Pb–Z

DURATA: 2 ORE E 30 MINUTI

Alessandro D'Andrea   Simone Diverio   Paolo Piccinni   Riccardo Salvati Manni

5 febbraio 2019

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale numerico reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)^t$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)^t$ e $u_3 = (1, 3, 2, -1)^t$, e sia $U = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

(i) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.

(ii) Completare la base $\mathcal{B}_U$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Determinare una base del sottospazio $U^\perp$ complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Siano assegnati i sottospazi vettoriali U e V di $\mathbb{R}^3$, definiti come segue:

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, una base e la dimensione di U e di V.

(ii) Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, una base e la dimensione di $U + V$ e di $U \cap V$.

(iii) Determinare, se esistono, i valori di k per cui $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 3. Sia assegnato, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, l'endomorfismo F definito da

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere la matrice associata a F nella base canonica e dedurne che F è un endomorfismo simmetrico (o autoaggiunto) rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Esercizio 4. Siano assegnate le matrici quadrate

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A è diagonalizzabile.

(ii) Verificare che se A e B sono simili (ovvero se esiste una matrice invertibile D tale che $B = D^{-1}AD$), allora B è diagonalizzabile.

(iii) Stabilire se le matrici A e B sono o non sono simili (vale a dire, se esiste o meno una matrice invertibile D tale che $D^{-1}AD = B$).

Esercizio 5. Si considerino le applicazioni lineari $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definite rispettivamente come

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le matrici A e B associate rispettivamente a F e G nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(ii) Considerato l'endomorfismo composto $G \circ F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare la matrice C associata a $G \circ F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane dell'immagine di $G \circ F$.

(iv) Stabilire se $G \circ F$ è iniettivo e/o suriettivo.

Soluzioni

Esercizio 1. La matrice A che ha per colonne le coordinate di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice B di ordine 2 evidenziata ha determinante non nullo, quindi è $r = rgA \geq 2$. Le sottomatrici quadrate di ordine 3 che orlano B hanno determinante rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Per il teorema di Kronecker è allora $r = 2$. Allora i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti, mentre i primi due sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\mathcal{B}_U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ è una base di U.

Un sistema di generatori di V è costituito dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$, essendo $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ la base canonica di V. La matrice che ha per colonne le coordinate di tali generatori rispetto alla base canonica è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo a C l'algoritmo di Gauss per estrarre una base da tale sistema di generatori. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = S,$$

dove S è una matrice a scala che ha i pivots sulle colonne 1, 2, 3 e 4. Ne segue che una base $\mathcal{B}_V$ di V che completa $\mathcal{B}_U$ è quella costituita dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.

Per determinare una base del sottospazio $U^\perp$ complemento ortogonale di U in V, occorre sostituire la scelta di $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ con una costituita da vettori ortogonali a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. E' immediato verificare che $\mathbf{f}_1 = (0, 1, -1, 1)$ e $\mathbf{f}_2 = (-1, 0, 1, 1)$ sono ortogonali a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{a}_2$.

Esercizio 2.

(i) La matrice che ha per colonne i vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Essendo la prima e terza riga uguali, il rango è lo stesso di $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \end{pmatrix}$. Le righe di B sono proporzionali solo per $k = 0$, e dunque $\text{rg}A = \text{rg } B = 2$ se $k \neq 0$ e $\text{rg}A = \text{rg } B = 1$ se $k = 0$. Due vettori indipendenti, per $k \neq 0$, sono ad esempio $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, mentre il solo $\vec{u}_1$ è vettore indipendente se $k = 0$. Dunque una base di U è $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ se $k \neq 0$, e il solo $\vec{u}_1$ se $k = 0$.

Il sistema lineare omogeneo che definisce Vammette come soluzione non nulla la terna $(-3, -3, 3)$ e ogni soluzione non nulla è multipla di questa. Dunque una base di V è data dal solo vettore $\vec{w} = (1, 1, -1)$ e $\dim V = 1$.

(ii) Per $k \neq 0$ un sistema di generatori di $U+V$ è per esempio $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$. Essendo $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2k \neq 0$ se $k \neq 0$, i vettori $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$ costituiscono una base di $U + V$ e risulta $\dim (U + V) = 3$. Per $k = 0$, un sistema di generatori è $(\vec{u}_1, \vec{w})$, ed essendo essi indipendenti, è anche una base di $U + V$; in tal caso $\dim (U + V) = 2$.

Per ottenere una base di $U \cap V$, dobbiamo anche distinguere i due casi $k \neq 0$ e $k = 0$. Nel primo caso aggiungiamo l'equazione $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & k & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = 0$ di U, ossia $x_1 - x_3 = 0$ alle equazioni di V, ottenendo che il sistema delle tre equazioni ha solo la soluzione nulla. Dunque $U \cap V = 0$ per $k \neq 0$, dunque in tal caso $U \cap V$ non ammette basi e $\dim (U \cap V) = 0$. Se $k = 0$ invece U si rappresenta con il sistema $x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0$, e anche in tal caso il sistema di quattro equazioni che rappresenta $U \cap V = 0$ ammette solo la soluzione nulla. Ancora è quindi $U \cap V = 0$.

(iii) Per $k \neq 0$ abbiamo già visto che $\dim (U + V) = 3$; dunque in tal caso $U + V = \mathbf{R^3}$. Essendo poi $U \cap V = 0$, si ha che per $k \neq 0$ risulta $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$. Per $k = 0$, essendo $\dim (U + V) = 2$, risulta che pur essendo $U \cap V = 0$, lo spazio $\mathbf{R^3}$ non è somma diretta dei due sottospazi U e V.

Esercizio 3.

(i) La matrice associate a F rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed essendo A simmetrica si ha subito che F è autoaggiunto.

(ii) Gli autovalori di F si ottengono subito dall'equazione caratteristica della matrice A

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0,$$

che sviluppata fornisce l'equazione $(\lambda - 1)^3 - 8(\lambda - 1) = 0$, ovvero $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 7) = 0$. Si hanno dunque i tre autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{8}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{8}$. I sistemi che forniscono i rispettivi autospazi sono: $V_1 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = x_1, 2x_1 + x_2 = x_2, 2x_1 + x_3 = x_3$, e un autovettore di modulo 1 è $\vec{w}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $V_{1-\sqrt{8}} : x_1+2x_2+2x_3 = (1-\sqrt{8})x_1, 2x_1+x_2 = (1-\sqrt{8})x_2, 2x_1+x_3 = (1-\sqrt{8})x_3$, e un autovettore di modulo 1 è ora $\vec{w}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; infine $V_{1+\sqrt{8}} : x_1+2x_2+2x_3 = (1+\sqrt{8})x_1, 2x_1+x_2 = (1 + \sqrt{8})x_2, 2x_1 + x_3 = (1 + \sqrt{8})x_3$, e un autovettore di modulo 1 è ora $\vec{w}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. I tre versori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ formano una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 4.

(i) L' equazione caratteristica di A risulta $(-1 - \lambda)^2(1 - \lambda) = 0$, e fornisce i due autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebrica 1. Gli autospazi corrispondenti V_{λ_1} e V_{λ_2} si ottengono risolvendo i sistemi lineari omogenei rispettivamente

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

da cui $V_{\lambda_1} = \{(t_1, 0, t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$ e $V_{\lambda_2} = \{(t, t, t)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Dunque le molteplicità geometriche, rispettivamente $2 = \dim V_{\lambda_1}$ e $1 = \dim V_{\lambda_2}$, coincidono con quelle algebriche, e ciò assicura che A è diagonalizzabile.

(ii) Essendo A diagonalizzabile, esiste una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC = \Delta$ sia diagonale. Se risulta $B = D^{-1}AD$, è anche $A = DBD^{-1}$, e dunque $\Delta = C^{-1}AC = C^{-1}(DBD^{-1})C = (D^{-1}C)^{-1}B(D^{-1}C)$, e dunque anche B è diagonalizzabile.

(iii) L' equazione caratteristica di B è $(-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$. Pertanto gli autovalori di B coincidono con quelli di A e hanno le stesse rispettive molteplicità algebriche. Non così è però per la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$. Infatti il relativo autospazio W_{λ_1} di B è dato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$, da cui segue che la dimensione di W_{λ_1} è 1. Dunque l'autovalore λ_1 ha per B molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Ciò implica che B non è diagonalizzabile, e dunque non simile alla matrice A.

Esercizio 5.

(i) Le matrici A e B associate a F e a G rispetto alle basi canoniche sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Di conseguenza, la matrice $C = BA$ associata a $G \circ F$ rispetto alle base canonica di $\mathbf{R}^3$ è:

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si riconosce subito che la matrice C ha rango 2 e che i primi due vettori colonna sono linearmente indipendenti. Essi generano quindi il sottospazio immagine di $G \circ F$, la cui equazione è dunque:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero, sviluppando il determinante, $x_1 - x_2 = 0$.

(iv) Essendo l'immagine dell'endomorfismo $G \circ F$ un sottospazio proprio di $\mathbf{R}^3$, si ha subito che $G \circ F$ non é né iniettivo né suriettivo.