Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canali A–C, L–Pa, Pb–Z

Durata: 2 ore e 30 minuti

Alessandro D'Andrea Simone Diverio Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

5 febbraio 2019

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale numerico reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)^t$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)^t$ e $u_3 = (1, 3, 2, -1)^t$, e sia $U = \mathrm{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

(i) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.

(ii) Completare la base $\mathcal{B}_U$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Determinare una base del sottospazio $U^\perp$ complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Siano assegnati i sottospazi vettoriali U e V di $\mathbb{R}^3$, definiti come segue:

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, una base e la dimensione di U e di V.

(ii) Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, una base e la dimensione di $U + V$ e di $U \cap V$.

(iii) Determinare, se esistono, i valori di k per cui $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 3. Sia assegnato, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, l'endomorfismo F definito da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere la matrice associata a F nella base canonica e dedurne che F è un endomorfismo simmetrico (o autoaggiunto) rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Esercizio 4. Siano assegnate le matrici quadrate

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A è diagonalizzabile.

(ii) Verificare che se A e B sono simili (vale a dire, se esiste una matrice invertibile D tale che $D^{-1}AD = B$) allora B è diagonalizzabile.

(iii) Stabilire se le matrici A e B sono o non sono simili.

Esercizio 5. Si considerino le applicazioni lineari $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definite rispettivamente come

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \quad G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le matrici A e B associate rispettivamente a F e G nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(ii) Considerato l'endomorfismo composto $G \circ F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare la matrice C associata a $G \circ F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane dell'immagine di $G \circ F$.

(iv) Stabilire se $G \circ F$ è iniettivo e/o suriettivo.