Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canali A – C, L – Pa, Pb – Z

DURATA: 2 ORE E 30 MINUTI

Alessandro D'Andrea   Simone Diverio   Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

25 giugno 2019

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro $k \in \mathbb{C}$ le seguenti due matrici, appartenenti rispettivamente a $M_{2,3}(\mathbb{C})$ e a $M_{2,1}(\mathbb{C})$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i+k \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il rango di A_k e il rango della matrice $A_k|b_k$, ottenuta aggiungendo ad A_k l'ulteriore colonna b_k, al variare di $k \in \mathbb{C}$.

(ii) Dedurre i valori di $k \in \mathbb{C}$ per cui il sistema lineare $A_k\,x = b_k$ è compatibile.

(iii) Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema $A_{-i}\,x = b_{-i}$, ottenuto sostituendo al parametro k il valore $-i$.

Esercizio 2. Detta $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si considerino i seguenti vettori:

$$v_1 = e_1 - e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_3 = e_1 - 2e_2 + 4e_3,$$

e

$$w_1 = 2e_1 + e_2, \quad w_2 = 3e_1 + e_2 + e_3, \quad w_3 = e_1 + 2e_3.$$

(i) Verificare che gli insiemi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare la matrice del cambiamento di coordinate[1] dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. Sia dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata nella base canonica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare gli autovalori di T e le relative molteplicità algebriche.

(ii) Determinare gli autospazi di T.

(iii) Trovare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare canonico, di autovettori per T.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi reali di una variabile di grado al più 2, munito del prodotto scalare definito positivo

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

(i) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare, rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$.

(ii) Determinare una base ortogonale per $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, rispetto al prodotto scalare dato.

(iii) Determinare equazioni cartesiane per il complemento ortogonale, rispetto al prodotto scalare dato, del sottospazio generato da $\{x^2\}$.

Esercizio 5. Dire, giustificandone il motivo, quali tra i seguenti sottoinsiemi di $V = M_{3,3}(\mathbb{C})$ sono sottospazi affini, indicando in particolare quali sono anche sottospazi vettoriali.

(i) Data $B \in V$ qualunque ma fissata, $L_1 = \{A \in V \mid \operatorname{tr}(BA)^t = 0\}$.

(ii) $L_2 = \{A \in V \mid \operatorname{tr}(A + \mathrm{Id}_3) = 1980\}$.

(iii) $L_3 = \{A \in V \mid \operatorname{tr}(A^2) = 0\}$.

---

[1] Per intenderci: si tratta della matrice che, moltiplicata per una colonna contenente le coordinate di un vettore nella base $\mathcal{B}$, fornisce come risultato le coordinate dello stesso vettore nella base $\mathcal{C}$.

Soluzioni

Esercizio 1. Considerando il minore di ordine 2 dato dalle prime due colonne di A_k e calcolandone il determinante si evince che se $k^2 + 1 \neq 0$, cioè $k \neq \pm i$ allora il rango di A_k è uguale a 2. Essendo $\operatorname{rk} A_k|b_k \leq 2$, ne consegue che se $k \neq \pm i$ anche il rango di $A_k|b_k$ è 2.

Ora, se $k = \pm i$, la seconda riga di $A_{\pm i}$ è uguale alla prima moltiplicata per $\mp i$, dunque $\operatorname{rk} A_{\pm i} \leq 1$, ma essendo $A_{\pm i} \neq 0$, ne segue $\operatorname{rk} A_{\pm i} = 1$.

Per quanto riguarda $A_{\pm i}|b_{\pm i}$, un singolo passaggio dell'eliminazione di Gauß, sostituendo la seconda riga con la seconda più la prima moltiplicata per $\pm i$, fornisce

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm i & \pm i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \pm i \pm i \end{pmatrix}$$

e mostra immediatamente che $\operatorname{rk} A_i|b_i = 2$ mentre $\operatorname{rk} A_{-i}|b_{-i} = 1$.

Per il Teorema di Rouché–Capelli, otteniamo quindi che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq i$.

In particolare, le soluzioni di $A_{-i}\, x = b_{-i}$ esistono, e si ottengono risolvendo il sistema dato dalla singola equazione

$$z_1 - iz_2 - iz_3 = 1.$$

Esse sono date in forma parametrica da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 + i(s+t) \\ s \\ t \end{pmatrix}, \text{ al variare di } s, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Esercizio 2. Siano B e C le matrici che contengono per colonna le coordinate dei vettori rispettivamente di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ espresse nella base $\mathcal{E}$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo diretto fornisce

$$\det B = 1 \neq 0, \quad \det C = -1 \neq 0,$$

pertanto le due matrici sono invertibili e dunque le loro colonne costituiscono delle basi.

Inoltre, le matrici B e C sono proprio le matrici del cambiamento di coordinate rispettivamente da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{E}$. Dunque la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è data dal prodotto $C^{-1}B$. Un modo per ottenere tale matrice è considerare la matrice giustapposta $C|B$ e procedere con una (doppia: a scendere prima, a salire poi) eliminazione di Gauß fino ad ottenere $\mathrm{Id}_3\,|C^{-1}B$. Si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & -10 & -16 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

In definitiva dunque, la matrice del cambio di coordinate cercata è data da

$$C^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il polinomio caratteristico di T è dato da

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1) = (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Dunque $\mathrm{sp}(T) = \{1, (1\pm\sqrt{5})/2\}$, ed ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1.

Determiniamo ora gli autospazi. L'autospazio relativo all'autovalore 1 è dato dal nucleo di

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{E.G.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale autospazio è dunque generato dal vettore $(0,1,0)^t$, come si vede da conto diretto. Per gli autospazi relativi a $(1\pm\sqrt{5})/2$, determiniamo il nucleo di

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \xmapsto{\text{E.G.}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi da conto diretto che l'autospazio relativo all'autovalore $(1 \pm \sqrt{5})/2$ è generato da $\big((1 \pm \sqrt{5})/2, 0, 1\big)^t$.

Essendo T un operatore autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico, ad autospazi distinti corrispondono autovettori ortogonali. I tre generatori che abbiamo trovato sono dunque già ortogonali a due a due, e per trovare una base ortonormale di autovettori è sufficiente normalizzarli. La base cercata è dunque data ad esempio da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{5})/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 4. Per trovare la matrice associata al prodotto scalare dato nella base canonica occorre calcolare i sei prodotti (e dunque i sei integrali elementari) seguenti:

$$\langle\!\langle 1, 1 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle 1, x \rangle\!\rangle, \langle\!\langle 1, x^2 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle, \langle\!\langle x, x^2 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle x^2, x^2 \rangle\!\rangle.$$

Abbiamo che:

$$\langle\!\langle 1, 1 \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2, \quad \langle\!\langle 1, x \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0,$$
$$\langle\!\langle 1, x^2 \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = 2/3, \quad \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx, = 2/3$$
$$\langle\!\langle x, x^2 \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0, \quad \langle\!\langle x^2, x^2 \rangle\!\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\, dx = 2/5,$$

e dunque la matrice associata è data da

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo preliminarmente che i calcoli precedenti mostrano 1 e x sono ortogonali. Quindi per ottenere una base ortogonale, possiamo fare direttamente l'ultimo passo del procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt (i primi due passi ci restituiscono semplicemente rispettivamente 1 e x). Quindi il terzo vettore che cerchiamo è dato da

$$x^2 - \frac{\langle\!\langle x^2, 1 \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle 1, 1 \rangle\!\rangle} 1 - \frac{\langle\!\langle x^2, x \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Per trovare equazioni cartesiane per il complemento ortogonale di $\mathrm{Span}\{x^2\}$, è sufficiente imporre l'ortogonalità di un polinomio generico $ax^2 + bx + c$ con x^2, dunque:

$$0 = \langle\!\langle ax^2 + bx + c, x^2 \rangle\!\rangle = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c,$$

da cui un'equazione cartesiana nelle coordinate (a, b, c) relative alla base canonica è data ad esempio da

$$3a + 5c = 0.$$

Esercizio 5. Data una matrice $B \in V$ sia ha che l'applicazione da V in V che manda una matrice A nella matrice BA è lineare. La trasposizione è un'applicazione lineare da V in V, e prendere la traccia di una matrice è un'applicazione lineare da V in $\mathbb{C}$. In definitiva, l'applicazione composta $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)^t$ è un'applicazione lineare da V in $\mathbb{C}$, in quanto composizione di applicazioni lineari. L'insieme L_1 è esattamente il nucleo di questa applicazione, dunque è un sottospazio vettoriale (e quindi affine) di V.

Come osservato in precedenza, prendere la traccia dà un'applicazione lineare da V in $\mathbb{C}$. Dunque

$$\mathrm{tr}(A + \mathrm{Id}_3) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_3) = \mathrm{tr}(A) + 3.$$

Quindi $L_2 = \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 1980 - 3 = 1977\}$. In altre parole L_2 è la controimmagine, tramite l'applicazione lineare traccia, di $1977 \in \mathbb{C}$, ed è dunque un sottospazio affine. Esso non è un sottospazio vettoriale perché, ad esempio, non contiene la matrice nulla.

Infine, l'insieme L_3 non è un sottospazio affine (e dunque nemmeno vettoriale). Non è infatti, ad esempio, chiuso rispetto alla somma: per un controesempio è sufficiente considerare le matrici

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e dunque $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(B^2) = 0$, ma

$$A + B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

e dunque

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui $\mathrm{tr}(A + B)^2 = 2 \neq 0$.