MATEMATICA TERZO CORSO 2019-20
DIARIO DELLE LEZIONI

1. Lunedì 23 settembre 2019

Continuità per funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: definizione attraverso gli ϵ e i δ; definizione per mezzo dei limiti. Significato intuitivo della continuità.

Applicazioni $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e loro grafico. Grafico di applicazioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: quando va bene, è una superficie nello spazio tridimensionale. Interpretazione del grafico. Curve di livello: non è detto che siano sempre curve; funzioni diverse possono avere le stesse curve di livello (relative a livelli diversi). Esempi.

Applicazioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ interpretate come curve parametriche. Tre esempi: un moto rettilineo e un moto circolare in $\mathbb{R}^2$; un'elica in $\mathbb{R}^3$.

Richiami su $\mathbb{R}^n$: è uno spazio vettoriale. Il prodotto scalare canonico permette di definire la norma (euclidea) di vettori. Interpretazione geometrica del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianza triangolare. Struttura metrica (euclidea) di $\mathbb{R}^n$. La distanza euclidea, nel caso di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, coincide con quella data da $|x - y|$.

Generalizzazione del concetto di limite a $\mathbb{R}^n$. La disuguaglianza triangolare assicura l'unicità del limite. Continuità di funzioni $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ attraverso la nozione di limite. Somme e prodotti di funzioni continue sono continue; la composizione di funzioni continue è continua.

Un esempio: per ogni scelta di $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, l'applicazione $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $C(x_1, \ldots, c_n) := c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ è continua in ogni punto. Dimostrazione utilizzando la definizione $\epsilon - \delta$ per mezzo della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. In particolare, le n funzioni che calcolano, ciascuna, una delle coordinate sono continue e più in generale, ogni funzione definita attraverso un'espressione polinomiale delle coordinate dell'argomento è continua.

Continuità di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (caso $n = 2$). Se $f(t) := (x(t), y(t))$ è continua, allora sia $x(t)$ che $y(t)$ sono continue. E' vero anche il viceversa.

2. Martedì 1 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

3. Lunedì 7 ottobre 2019

Richiami dalla lezione precedente.

Sottoinsiemi aperti e chiusi in $\mathbb{R}$. Definizioni equivalenti e proprietà degli insiemi aperti. Intorni sferici di un punto. Sottoinsiemi chiusi: sono i complementari degli aperti; sono i sottoinsiemi che contengono tutti i punti di accumulazione. Esempi.

Sottoinsiemi aperti e chiusi in $\mathbb{R}^n$. Esempi. Parte interna, chiusura e frontiera di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Teorema di Weierstrass. Sottoinsiemi connessi (per archi). Teorema degli zeri, con dimostrazione.

Derivate parziali di una funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

4. Martedì 8 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

5. Lunedì 14 ottobre 2019

Ripasso sulla differenziabilità/derivabilità di funzioni di una variabile reale. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in x_0 se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + o(h)$. In tal caso, esiste il limite $f'(x_0)$ del rapporto incrementale in x_0 e coincide con a. La differenziabilità coincide con l'esistenza di $f'(x_0)$.

Per le funzioni di più variabili le cose vanno diversamente. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$. Se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f ammette sia le derivate parziali che direzionali in (x_0, y_0) e inoltre $\partial f/\partial v = \nabla f \cdot v$. Esempi di calcolo di derivate parziali, direzionali e gradiente di funzioni di più variabili.

Aspetti patologici: una funzione con tutte le derivate parziali in un punto P ma nemmeno continua in P; una funzione con le derivate parziali in P che non ha altre derivate direzionali in P; una funzione con le derivate parziali in P che ha tutte le derivate direzionali in P ma per la quale $\partial f/\partial v$ non coincide con $\nabla f \cdot v$.

Una funzione che ha derivate parziali e direzionali nulle in P, e che quindi soddisfa $\partial f/\partial v = \nabla f \cdot v$, ma che non è nemmeno continua in P. Attenzione: bastava prendere il quadrato della funzione fatta a lezione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Se tutte le derivate parziali di f esistono e sono continue in un intorno di (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0). Esempi di funzioni differenziabili.

6. Martedì 15 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

7. Lunedì 21 ottobre 2019

Derivate parziali e gradiente della somma di due funzioni; del prodotto di due funzioni; di un multiplo di una funziona. La composizione di due funzioni differenziabili è ancora differenziabile. Derivate parziali della composizione di due funzioni differenziabili. Esempi.

Gradiente di $x^2 + y^2$ e sua perpendicolarità alle circonferenze centrate nell'origine. Il gradiente di una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è perpendicolare alle curve di livello di g.

8. Martedì 22 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

9. Lunedì 28 ottobre 2019

Richiami: sviluppo in serie di Taylor per funzioni di una variabile reale: resto di Peano e resto di Lagrange. Caso di funzioni di più variabili reali; la matrice Hessiana.

Massimi e minimi locali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite su un aperto. Punti critici. Natura dell'Hessiano: forme quadratiche definite, semidefinite, indefinite. Forme quadratiche degeneri e non degeneri. Un criterio sufficiente affinché un punto sia di massimo o minimo locale. Un esempio: punti critici della funzione $f(x, y) = xe^{-y^2} + ye^{-x^2}$.

Anticipazioni: alcuni esempi motivanti il Teorema del Dini.

10. Martedì 29 ottobre 2019

Risoluzione di esercizi.

11. Lunedì 4 novembre 2019

Un esempio motivante: la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme $A = \{(x, y)|x^4 + y^4 \leq 2\}$ ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass, poiché è continua e A è chiuso e limitato. La parte interna di A ha come unico punto critico l'origine $(0, 0)$, che è certamente punto di minimo per f. Eventuali punti di massimo per f appartengono quindi alla frontiera di A: come trovarli?

Richiami su curve (regolari) in $\mathbb{R}^2$. Vettore velocità: è tangente alla curva. Enunciato del teorema del Dini in due dimensioni. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, $f(x_0, y_0) = 0$ e la derivata parziale $\partial f/\partial y$ non si annulla in (x_0, y_0), allora esiste un'unica funzione g definita in un intorno (opportunamente piccolo) di x_0 e a valori in $\mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = y_0$ e $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = g(x)$. Tale funzione g è ancora di classe C^1 e la sua derivata soddisfa $g'(t) = -f_x(t, g(t))/f_y(t, g(t))$.

Spiegazione dell'enunciato sull'esempio $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Calcolo della derivata della corrispondente funzione g nel punto $x_0 = 1$ in due modi. Idea della dimostrazione dell'esistenza della funzione g. Se il gradiente di f non si annulla in nessun punto del luogo $f(x, y) = 0$, allora tale luogo è localmente, in ogni punto, una (porzione di) curva regolare e ∇f è perpendicolare a tale curva di livello in ogni punto.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di due variabili reali. Se $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, $\phi(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla\phi$ non si annulla su (x_0, y_0), allora quando (x_0, y_0) è un punto di max/min relativo di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TRA I SOLI PUNTI CHE SODDISFANO IL VINCOLO si ha $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\nabla\phi(x_0, y_0)$. Dimostrazione. Applicazione a due esempi: $\phi(x, y) = x^4 + y^4 - 2, f(x, y) = x^2 + y^2$; $\phi(x, y) = x^2/4 + y^2 - 1, f(x, y) = x^2 + y^2$.

Generalizzazioni degli enunciati a più di due dimensioni.

12. Martedì 5 novembre 2019

Risoluzione di esercizi.

13. Martedì 12 novembre 2019

Prova di autovalutazione.

14. Lunedì 18 novembre 2019

Correzione della prova di autovalutazione. Interpretazione geometrica del determinante.

15. Martedì 19 novembre 2019

Risoluzione di esercizi.

16. Lunedì 25 novembre 2019

Cambiamenti di coordinate e applicazioni differenziabili invertibili con inversa differenziabile. Teorema di invertibilità locale. Elemento di area (in $\mathbb{R}^2$) o di volume (in $\mathbb{R}^3$) e sua espressione attraverso il determinante della matrice Jacobiana.

Integrazione di funzioni in n variabili: richiami del caso $n = 1$. Definizione di integrabilità (su un rettangolo) per funzioni di 2 variabili. Generalizzazione al caso $n > 2$. Integrabilità di funzioni continue su domini (semplici, regolari) di $\mathbb{R}^2$. Calcolo dell'integrale (su un dominio semplice) per mezzo dell'integrazione iterata: calcolo esplicito su un esempio in due modi diversi.

17. Martedì 26 novembre 2019

Risoluzione di esercizi.

18. Lunedì 2 dicembre 2019

Un po' di precisazioni sull'integrazione su domini regolari e sulle regioni di area(o volume, misura) nulla. Richiami su convergenza e assoluta convergenza di serie: un'analogia sull'integrazione di funzioni (con segno) su regioni di $\mathbb{R}^n$ e sul concetto di sommabilità (senza chiamarla così) di una funzione. Quando una funzione è positiva, tutto fila liscio. Una funzione continua su un dominio regolare è sommabile (cioè integrabile in valore assoluto con integrale finito).

Definizione di integrale di funzioni in n variabili reali con $n > 2$: funziona tutto alla stessa maniera, con qualche variazione nel concetto di domini semplici. Un esempio di integrale triplo: il volume di una sfera.

Integrali impropri. Problemi di convergenza. Sommabilità. Due esempi.

19. Martedì 3 dicembre 2019

Risoluzione di esercizi.

20. Lunedì 16 dicembre 2019

Limite puntuale di una successione di funzioni: il limite di funzioni continue può non essere continuo. L'integrale del limite di una successione di funzioni può coincidere con il limite degli integrali delle funzioni della successione, ma questo non succede sempre: esempi e controesempi. Enunciato del Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Integrali di funzioni dipendenti da parametro e derivazione sotto il segno di integrale: condizioni affinché coincida con la derivata dell'integrale.

Un'applicazione: calcolo (non totalmente rigoroso) dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

21. Martedì 17 dicembre 2019

Risoluzione di esercizi.

22. Giovedì 16 gennaio 2019

Risoluzione di esercizi.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it