FAC-SIMILE DELLA PROVA D'ESAME
(Studenti di statistica, economia e società — statistica gestionale)
21 gennaio 2019

1. Dire in quali punti sia continua e in quali differenziabile la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \sin(y) & \text{se } x \le y \\ y + \sin(x) & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Soluzione: Nella regione aperta $\{(x,y) \,|\, x > y\}$, la funzione f è definita come somma di funzioni differenziabili infinite volte, ed è quindi sia continua che differenziabile; lo stesso avviene nel caso $x < y$. Rimane da stabilire in quali punti della forma $(a,a), a \in \mathbb{R}$, la funzione f sia continua/differenziabile.

La continuità è evidente, poiché entrambe le definizioni hanno limite $a + \sin a$ quando $(x,y) \to (a,a)$. La differenziabilità è lievemente più complicata. Provando a calcolare la derivata parziale $\partial f/\partial x$ in un punto (a,a), ad esempio, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h}.$$

L'espressione sotto limite a destra vale $(\sin(a+h) - \sin(a))/h$ quando $h > 0$ e 1 quando $h < 0$. Vogliamo che i limiti $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$ esistano entrambi e coincidano; poiché

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a,$$

deve valere $\cos a = 1$ affinché la derivata parziale rispetto ad x esista nel punto (a,a). In tal caso, $\partial f/\partial x(a,a) = 1$. I conti per la derivata parziale rispetto ad y sono analoghi. Si conclude che le derivate parziali nel punto (a,a) esistono entrambe, e sono entrambe uguali ad 1, solo quando a è un multiplo di 2π; per le altre scelte di a, f non è differenziabile in (a,a).

Sia allora $a = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Se $x = a + h, y = a + k$, abbiamo

$$f(x,y) = \begin{cases} a + h + \sin(a+k) \text{ quando } h \le k \\ a + k + \sin(a+h) \text{ quando } h \ge k. \end{cases}$$

Sappiamo che $\sin(a+t) = \sin(a) + \cos(a)t + o(t)$ e quindi entrambe le espressioni coincidono con $a + h + k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$. Di conseguenza, f è differenziabile nei punti (a,a) che soddisfano $\cos(a) = 1$.

Ricapitolando: f è continua ovunque. E' inoltre differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ tranne che nei punti (a,a) che NON soddisfano $\cos(a) = 1$.

2. Calcolare le derivate parziali nel punto $P \equiv (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$$

e dire se f sia differenziabile nel punto P.

Soluzione: Sostituendo $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ si ottiene $f(x,y) = r^{4/3}\sqrt{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)}$. Poiché l'espressione sotto radice è limitata (ad esempio, da 2), si ottiene subito che $f(x,y) = o(r) = o(\sqrt{x^2+y^2}$ in un intorno di $(0,0)$. Ma allora

$$f(x,y) = f(0,0) + 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

dal momento che $f(0,0) = 0$. Questo mostra che f è differenziabile in $(0,0)$ e che le sue derivate parziali sono entrambe nulle.

3. Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xy$$

sull'ellisse $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$.

Soluzione: La regione Γ è chiusa e limitata, e la funzione continua f ha quindi massimo e minimo per il Teorema di Weierstrass. Γ è della forma $\Phi(x, y) = 0$ dove $\Phi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2$ è una funzione differenziabile di gradiente $\nabla\Phi = (2x, 4y)$, che non si annulla nei punti di Γ.

Possiamo allora adoperare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti che sono estremali tra quelli soggetti al vincolo dovranno soddisfare

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \Phi \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

che nel nostro contesto si traducono in

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 4y \\ x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases}$$

Moltiplicando le prime due equazioni si ottiene $xy(1 - 8\lambda^2) = 0$; pertanto $x = 0$, oppure $y = 0$, oppure $\lambda = \pm 1/\sqrt{8}$. Quest'ultimo valore, sostituito nelle prime due equazioni, fornisce $x = \pm y\sqrt{2}$. Possiamo adesso sostituire nel vincolo.

- Se $x = 0$, allora $y^2 = 1$ e otteniamo i punti $P \equiv (0, 1)$, $Q \equiv (0, -1)$.
- Se $y = 0$, allora $x^2 = 2$ e otteniamo i punti $R \equiv (\sqrt{2}, 0)$, $S \equiv (-\sqrt{2}, 0)$.
- Se $x = \pm y\sqrt{2}$, allora $4y^2 = 2$ e otteniamo $x = \pm 1$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$, cioè i quattro punti $T_{1,2,3,4} \equiv (\pm 1, \pm 1/\sqrt{2})$.

Si vede subito che la funzione f vale 0 nei punti P, Q, R, S, mentre vale $\pm 1/\sqrt{2}$ nei punti T_i. In conclusione, il massimo e il minimo assoluti di f sono $1/\sqrt{2}$ e $-1/\sqrt{2}$.

4. Calcolare l'integrale
$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$
dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ e $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Soluzione:

In coordinate polari, la regione D è descritta dalle equazioni $\rho \leq 2, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$. L'integrale, nelle nuove coordinate, si traduce in
$$\int\int_D e^{\rho^2}\rho\, d\rho d\theta = \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^2 \rho e^{\rho^2} d\rho\right).$$
Svolgendo i conti, si ottiene $\pi/8 \cdot (e^4 - 1)$.