FAC-SIMILE 4 DELLA PROVA D'ESAME
(Studenti di statistica, economia e società — statistica gestionale)
21 gennaio 2019

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2 - y})$$
e dire se si tratti di un aperto, di un chiuso o di nessuno dei due. Calcolarne la parte interna, la chiusura e la frontiera.

Soluzione: Affinché sia possibile calcolare la radice quadrata, deve valere $x^2 - y \geq 0$. Inoltre la funzione logaritmo è definita solamente per argomenti strettamente positivi, e quindi dovrà aversi anche $x + \sqrt{x^2 - y} > 0$. Se $x > 0$, la positività è automatica; se invece $x \leq 0$, allora dovrà aversi $\sqrt{x^2 - y} > -x$ da cui, quadrando, $x^2 - y > x^2$, cioè $y < 0$.

Il dominio D della funzione data è quindi costituito dai punti che soddisfano $y \leq x^2$ se $x > 0$ e da quelli che soddisfano $y < 0$ quando $x \leq 0$:
$$D = \{(x,y) \,|\, x > 0, y \leq x^2\} \cup \{(x,y) \,|\, x \leq 0, y < 0\}.$$

L'insieme D non è né chiuso, né aperto. In effetti, la sua chiusura è
$$\overline{D} = \{(x,y) \,|\, x > 0, y \leq x^2\} \cup \{(x,y) \,|\, x \leq 0, y \leq 0\},$$
mentre la sua parte interna è
$$D^\circ = \{(x,y) \,|\, x > 0, y < x^2\} \cup \{(x,y) \,|\, x \leq 0, y < 0\}.$$
La sua frontiera è quindi
$$\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ = \{(x,x^2) \,|\, x > 0\} \cup \{(x,0) \,|\, x \leq 0\}.$$

In questo tipo di esercizi non richiediamo una dimostrazione, ma vediamo come avremmo potuto verificare le affermazioni appena fatte. Sia $g(x)$ la funzione che vale 0 per $x \leq 0$ e x^2 per $x > 0$. Si osserva subito che la funzione $g(x)$ è continua, poiché i due *tronconi* continui per x positive e negative si *incollano bene*[1] in 0. Allora:

- $\overline{D} = \{(x,y) \,|\, y \leq g(x)\}$ è chiuso, perché definita attraverso una disuguaglianza larga che utilizza una funzione continua.
- $D^\circ = \{(x,y) \,|\, y < g(x)\}$ è aperto, perché definito attraverso una disuguaglianza stretta che utilizza una funzione continua.
- I punti $(x,0), x \leq 0$, sono punti di accumulazione per D, ma non appartengono a D, che quindi non è chiuso.
- I punti $(x,x^2), x > 0$, sono punti di D, ma non sono interni, poiché il punto $(x, x^2 + \epsilon)$ non appartiene a D per nessuna scelta di $\epsilon > 0$. Pertanto, D non è aperto.
- Gli unici punti di $\overline{D} \setminus D$ sono di accumulazione per D, e di conseguenza $\overline{D}$ è un chiuso che contiene D, ed è contenuto nella chiusura di D: deve pertanto coincidere con la chiusura di D.
- Gli unici punti di $D \setminus D^\circ$ non sono interni a D e di conseguenza D° è un aperto che contiene tutti i punti interni a D: deve pertanto coincidere con la parte interna di D.

[1] Mi aspetto che sappiate cosa sto dicendo.

2. Determinare i punti di continuità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

Soluzione: La funzione $\mathbb{R}_{\geq 0} \ni t \to \sqrt{t} \in \mathbb{R}$ è ovunque continua, e derivabile ovunque tranne che in 0. Pertanto f è continua in quanto composizione di funzioni continue, ed è differenziabile in tutti i punti che soddisfano $x^4 + y^4 > 0$, cioè in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ con la possibile eccezione di $(0, 0)$.

Per quanto riguarda la differenziabilità nel punto $P \equiv (0, 0)$, le derivate parziali esistono entrambe, e sono entrambe nulle, come si calcola facilmente. In effetti $f(x, 0) = x^2, f(0, y) = y^2$ sono entrambe derivabili in 0 con derivata nulla. Sostituendo $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ in $f(x, y)$ si ottiene

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}.$$

L'espressione in θ è limitata, ad esempio da $\sqrt{2}$, in ogni intorno dell'origine, e quindi in un intorno di $(0, 0)$ si ha

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = O(r^2)$$

o equivalentemente

$$f(x, y) = O(|(x, y)|^2) = o(|(x, y)|).$$

Ricordando che $f(0, 0) = 0, \partial f/\partial x(0, 0) = 0, \partial f/\partial y(0, 0) = 0$, si ha allora:

$$f(x, y) = f(0, 0) + 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(|(x, y)|)$$

e quindi f è differenziabile anche in $(0, 0)$, con differenziale nullo.

3. Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2 + (x+y)^3$$

nel quadrato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x, y \le 2\}$.

Soluzione:

Intanto, la regione D è compatta (cioè chiusa e limitata) e quindi il Teorema di Weierstrass ci garantisce che la funzione continua f abbia massimo e minimo in D.

Essendo f differenziabile, troviamo innanzitutto i punti in cui il gradiente di f si annulla. Si calcola facilmente

$$\nabla f = (2x + 3(x+y)^2, 3(x+y)^2).$$

Affinché ∇f si annulli, deve valere

$$\begin{cases} 2x + 3(x+y)^2 = 0 \\ 3(x+y)^2 = 0, \end{cases}$$

da cui $x + y = 0, x = 0$. In conclusione, l'unico punto critico di f è l'origine $(0,0)$, ed è quindi l'unico punto nella parte interna di D che può essere di massimo o minimo locale.

Per quanto riguarda i punti sul bordo, che soddisfano $x = \pm 2$ oppure $y = \pm 2$, si può utilizzare il medoto dei moltiplicatori di Lagrange. Tuttavia, il modo più semplice di procedere è quello di sostituire $x = \pm 2$ oppure $u = \pm 2$ nella f. Si ha

$$f(2,y) = 4 + (y+2)^3$$
$$f(-2,y) = 4 + (y-2)^3$$
$$f(x,-2) = x^2 + (x-2)^4 = x^3 - 5x^2 + 12x - 8$$
$$f(x,2) = x^2 + (x+2)^3 = x^3 + 7x^2 + 12x + 8$$

Le prime tre funzioni sono crescenti, come si vede, ad esempio, calcolandone la derivata che non è mai negativa. La derivata dell'ultima è invece $3x^2+14x+12$ che si annulla in $(-7 \pm \sqrt{13})/3$: il valore $(-7+\sqrt{13})/3$ rientra nell'intervallo che ci interessa.

In conclusione, i punti che si candidano ad essere di massimo/minimo assoluto sono:

– l'origine $(0,0)$ in cui $f(0,0) = 0$;

– il punto $P \equiv ((-7+\sqrt{13})/3, 2)$ che soddisfa

$$f(P) = \left(\frac{-7+\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{3}\right)^3 = \frac{146 - 26\sqrt{13}}{27} \simeq 1{,}935;$$

– i quattro vertici del quadrato per i quali si calcola

$$f(2,2) = 68, \qquad f(2,-2) = 4, \qquad f(-2,2) = 4, \qquad f(-2,-2) = -60.$$

Il massimo di f nella regione D è quindi 68, mentre il minimo è -60.

4. Calcolare l'integrale

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

dove D è il quadrato di vertici $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ e $f(x,y) = xy$.

Soluzione:

Il quadrato D è unione delle regioni semplici $\{(x,y) \,|\, -1 \leq x \leq 0, -x-1 \leq y \leq x+1\}$ e $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1-x\}$. L'integrale può essere quindi calcolato come segue:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x-1}^{x+1} xydy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{x-1}^{1-x} xydy \right) dx.$$

A questo punto, i conti sono facili:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} x \left((x+1)^2/2 - (-x-1)^2/2) \right) dx + \int_{0}^{1} x \left((1-x)^2/2 - (x-1)^2/2 \right) dx = 0.$$

In effetti, si poteva anche osservare che il contributo all'integrale dato dalla porzione di D contenuta nel semipiano delle y positive cancella perfettamente il contributo dato dal semipiano delle y negative.