PROVA DI AUTOVALUTAZIONE

(Studenti di statistica, economia e società — statistica gestionale)

12 novembre 2019

1. Dire in quali punti sia continua e in quali differenziabile la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = |y - x^2|$.

Soluzione: La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = |t|$ è continua ovunque e differenziabile in tutti i punti tranne che in $t = 0$. Poiché $y - x^2$ è differenziabile, e quindi continua, ovunque, la composizione $f(x, y) = |y - x^2|$ è sicuramente continua ovunque e differenziabile in tutti i punti in cui $y - x^2 \neq 0$.

Per quanto riguarda i punti $(x, y) = (t, t^2)$, si vede facilmente che la derivata parziale di f rispetto a y non esiste in tali punti e quindi f non è differenziabile. In effetti,

$$\lim_{k \to 0^+} \frac{f(t, t^2 + k) - f(t, t^2)}{k} = \lim_{k \to 0^+} \frac{k}{k} = 1,$$

mentre

$$\lim_{k \to 0^-} \frac{f(t, t^2 + k) - f(t, t^2)}{k} = \lim_{k \to 0^+} \frac{-k}{k} = -1.$$

2. Calcolare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{x+y} + y^2 - x$ e dire se sono di massimo/minimo locale.

Soluzione:

La funzione f è differenziabile poiché ottenuta sommando composizioni di funzioni differenziabili. Le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} + 2y.$$

Il punto (x, y) è critico per f se si annullano entrambe le derivate parziali, cioè se

$$\begin{cases} e^{x+y} - 1 = 0 \\ e^{x+y} + 2y = 0. \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene $y = -1/2, x = 1/2$, e quindi $(1/2, -1/2)$ è l'unico punto critico di f.

Calcoliamo in tale punto la matrice Hessiana: le derivate parziali seconde sono

$$f_{xx} = e^{x+y}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y}, \qquad f_{yy} = e^{x+y} + 2,$$

e quindi

$$(Hf)(1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

che soddisfa il criterio sufficiente per le forme quadratiche definite positive. In conclusione, l'unico punto critico $(1/2, -1/2)$ è di minimo locale per f e abbiamo $f(1/2, -1/2) = 3/4$.

Per inciso, tale punto è di minimo assoluto[1]. In effetti, la funzione si può riscrivere nella forma

$$f(x, y) = \left(e^{x+y} - (x + y)\right) + \left(\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Il secondo addendo è sempre $\geq 3/4$, mentre la funzione $g(t) = e^t - t$ diverge positivamente quando $t \to \pm\infty$ e ha minimo (assoluto) in $t = 0$, dove vale 0. Pertanto $(e^{x+y} - (x + y)) \geq 0$, da cui $f(x, y) \geq 3/4$.

La funzione non ha massimi assoluti, in quanto $f(x, -x) = x^2 - x + 1$ diverge positivamente quando $x \to \pm\infty$.

[1] Qui, in una prima stesura delle soluzioni, avevo scritto delle sciocchezze.

3. Disegnare la regione $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 25\}$. Spiegare perché la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 + y^3$ ammetta massimo e minimo e calcolarli.

Soluzione:

La regione A è quella interna alla circonferenza centrata nell'origine di raggio 5. E' chiusa ed è inoltre limitata in quanto le coordinate x, y dei suoi punti non superano, in valore assoluto, 5. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione continua f deve ammettere, sull'insieme chiuso e limitato A, sia massimo che minimo.

Cerchiamo ora, innanzitutto, i punti critici interni alla regione A. Le derivate parziali della funzione f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

L'unico punto critico di f è quindi $(0,0)$, che appartiene alla regione A, e in tale punto la funzione f vale 0.

Per quanto riguarda i punti critici sulla frontiera di A, possiamo calcolarli attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, applicabile in quanto sui punti che annullano il vincolo $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25$, il gradiente di Φ non è mai nullo. Dobbiamo allora calcolare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x = \lambda 2x \\ 3y^2 = \lambda 2y. \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive come $(\lambda - 1)2x = 0$, quindi $x = 0$ oppure $\lambda = 1$. Se $x = 0$, allora dal vincolo si ottiene $y = \pm 5$. Se $\lambda = 1$, allora $3y^2 = 2y$, cioè $y(3y-2) = 0$ da cui $y = 0$ oppure $y = 2/3$. Se $y = 0$, dal vincolo si ottiene $x = \pm 5$; se $y = 2/3$, dal vincolo si ottiene $x = \pm\sqrt{221/9}$.

Calcolando la funzione f su tali punti si ottiene

$$f(\pm 5, 0) = 25, \qquad f(0,5) = 125, \qquad f(0,-5) = -125, \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{221}{9}}, \frac{2}{3}\right) = \frac{671}{27} \simeq 24,852...$$

Dovendo il massimo e il minimo assoluti di f essere tra i punti fin qui calcolati, possiamo concludere che f raggiunge il suo massimo (risp. minimo) nel punto $(0,5)$ (risp. $(0,-5)$) e che tale valore è 125 (risp. -125).