Esame scritto Matematica III, a.a. 2019/2020, appello straordinario — 5 ottobre 2020

Studenti di economia finanza e assicurazioni/statistica economia e società/statistica gestionale
Soluzioni

1. Decidere se il sottoinsieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\pi^2, -2 \leq \cos(x) < 1\}$$

sia aperto e/o chiuso. Indicarne parte interna, chiusura e frontiera. La risposta non va giustificata, **ma i sottoinsiemi $D, \overline{D}, D^\circ, \partial D$ vanno illustrati con un disegno**.

Soluzione: La condizione $x^2 + y^2 < 4\pi^2$ individua i punti che giacciono all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 2π. La coordinata x di questi punti è compresa tra -2π e 2π e la seconda condizione $-2 \leq \cos(x) \leq 1$ esclude le sole ascisse per le quali il coseno vale 1, in quanto $\cos(x)$ è sempre ≥ -2.

I valori di x, tra quelli che ci interessano, per i quali $\cos(x) = 1$ sono $0, \pm 2\pi$. Dobbiamo quindi togliere dal disco aperto di raggio 2π i punti che giacciono sull'asse y, **e solo quelli**, poiché nessuno dei punti in tale disco aperto ha ascissa $\pm 2\pi$.

In conclusione $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\pi^2, x \neq 0\}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, in quanto definito da disuguaglianze strette rispetto a espressioni continue nelle coordinate, e coincide quindi con la sua parte interna.

La sua chiusura è il disco chiuso $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$, poiché tutti i punti sulla circonferenza, e anche quelli sull'asse y che hanno ordinata compresa tra -2π e 2π, sono di accumulazione per D. La frontiera di D si ottiene per differenza insiemistica tra chiusura e parte interna, ed è

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\pi^2\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2\pi \leq y \leq 2\pi\}.$$

2. Calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (x-y)e^{x+y} + \sin(\pi \cdot xy).$$

Dire se $(0,0)$ sia di massimo o minimo locale per la funzione f.

Soluzione: Si possono naturalmente calcolare le derivate prime e seconde della funzione f in $(0,0)$. E' tuttavia più semplice osservare che

$$e^t = 1 + t + o(t), \qquad \sin(t) = t + o(t^2)$$

per ottenere

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + o(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad \sin(\pi \cdot xy) = \pi \cdot xy + o((x^2+y^2)^2)$$

da cui

$$f(x,y) = (x-y)(1+(x+y)+o(\sqrt{x^2+y^2}) + \pi \cdot xy + o((x^2+y^2)^2) = x - y + x^2 - y^2 + \pi \cdot xy + o(x^2+y^2),$$

che è pertanto lo sviluppo in serie di Taylor di f al secondo ordine nel punto $(0,0)$.

La parte di ordine 1 di tale sviluppo non si annulla, e quindi il punto $(0,0)$ non è un punto critico. Pertanto, non può essere né di massimo, né di minimo locale.

3. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

dove $f(x,y,z) = z$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$.

Soluzione: La cosa più semplice è utilizzare coordinate cilindriche. La regione D è allora ritagliata dalle condizioni

$$\rho \leq 2, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \qquad 0 \leq z \leq 2$$

e l'integrale diventa

$$\int_D z\rho d\rho d\theta dz = \left(\int_0^2 zdz\right) \cdot \left(\int_0^2 \rho d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) = 2 \cdot 2 \cdot \pi/2 = 2\pi.$$