Esame scritto Matematica III, a.a. 2019/2020, quarto appello

Studenti di economia finanza e assicurazioni/statistica economia e società/statistica gestionale

1. Determinare il dominio di definizione della funzione di variabile reale:

$$f(x, y) = \frac{\log(x)}{\log(y)}.$$

Dire se si tratti di un aperto, di un chiuso oppure nessuno dei due. Indicare la frontiera, l'interno e la chiusura. Le risposte non vanno giustificate.

Soluzione: L'argomento della funzione logaritmo deve essere positivo. Inoltre il denominatore di una frazione deve essere diverso da 0. Pertanto, il dominio di definizione D della funzione f è costituito dalle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano $x > 0, y > 0, \log(y) \neq 0$. In altre parole

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y \neq 1\}.$$

L'insieme D è definito da disuguaglianze strette, ed è quindi aperto; conseguentemente, coincide con la sua parte interna.

La chiusura di D è invece il sottoinsieme

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si vede subito che tale sottoinsieme, che contiene D, è definito da disuguaglianze larghe ed è quindi un chiuso. Inoltre, i punti di $\overline{D}$ che non appartengono a D sono tutti e soli quelli che hanno una delle due coordinate uguale a 0 o la coordinata y uguale ad 1, e si vede subito che sono di accumulazione per D (in altre parole, ogni loro intorno contiene elementi di D):

Per concludere, la frontiera di D si ricava dalla differenza insiemistica $\overline{D} \setminus D^\circ = \overline{D} \setminus D$ ed è quindi

$$\partial D = \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 1) \mid x \geq 0\}.$$

2. Determinare in quali punti la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (e^x - 1)|x - y|$ risulta differenziabile.

Soluzione: Le funzioni $e^x - 1$ e $x - y$ sono differenziabili ovunque. Inoltre, la funzione valore assoluto è differenziabile ovunque tranne che in 0. Pertanto la funzione f è differenziabile in tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano $x - y \neq 0$, in quanto prodotto di composizioni di funzioni differenziabili.

Per quanto riguarda i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali $x - y = 0$, bisogna invece procedere diversamente. Calcoliamo, ad esempio, le derivate parziali nel punto (a, a), dove $a \in \mathbb{R}$. La derivata parziale rispetto ad y esiste quando esiste il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^a - 1) \cdot |-h| - (e^a - 1) \cdot 0}{h} = \lim_{h \to 0} (e^a - 1) \frac{|h|}{h}.$$

La frazione in h assume valore 1 quando h è positivo e -1 quando h è negativo. Il limite $h \to 0$ esiste quindi esclusivamente quando $e^a - 1 = 0$, cioè quando $a = 0$. Possiamo quindi concludere che nei punti (a, a), dove $a \neq 0$, la funzione f non è differenziabile in quanto non possiede la derivata parziale rispetto a y.

Rimane da stabilire la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$. Il conto precedente mostra che in tale punto la derivata parziale $\partial f / \partial y$ esiste e vale 0. La restrizione di f sull'asse x è costantemente uguale a 0 e quindi anche la derivata parziale rispetto ad x esiste e vale 0. Pertanto, f è differenziabile in $(0, 0)$ se e solo se il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

esiste ed ǹullo.

Passando in coordinate polari, si vede che

$$f(x, y) - f(0, 0) = (e^{\rho \cos\theta} - 1)|\rho\cos\theta - \rho\sin\theta| = (\rho\cos\theta + o(\rho))|\rho||\cos\theta - \sin\theta|,$$

e quindi

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \rho \cdot (\cos\theta + o(1)) \cdot |\cos\theta - \sin\theta|.$$

Ad ogni modo, la quantità in θ è limitata, e quindi il limite $\rho \to 0$ esiste ed è nullo.
In alternativa, sempre passando in coordinate polari, abbiamo

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (e^{\rho \cos(\theta)} - 1)|\cos(\theta) - \sin(\theta)|.$$

Dato che che $|\cos(\theta) - \sin(\theta)|$ è limitata e

$$e^{-\rho} - 1 \leq e^{\rho \cos(\theta)} - 1 \leq e^{\rho} - 1$$

possiamo di nuovo concludere che

$$\lim_{\rho \to 0} (e^{\rho \cos(\theta)} - 1)|\cos(\theta) - \sin(\theta)| = 0$$

In conclusione, la funzione f è differenziabile nei soli punti (x, y) che soddisfano $x \neq y$, e nell'origine.

3. Calcolare il seguente integrale doppio generalizzato:

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

dove $f(x,y) = y + y^2$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$.

Soluzione: La funzione é non negativa su D e quindi l'integrale doppio coincide con il limite

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} f(x,y)dxdy,$$

dove $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$. L'integrale doppio sulla regione limitata (e semplice!) D_R si calcola facilmente come segue:

$$\begin{aligned}\iint_{D_R} f(x,y)dxdy &= \int_1^R dx \left(\int_0^{e^{-x}} (y+y^2)dy\right) \\ &= \int_1^R \left(\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3}\right) dx \\ &= \left(-\frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{-3x}}{9}\right)\Bigg]_1^R \\ &= \left(\frac{e^{-2}}{4} + \frac{e^{-3}}{9}\right) - \left(\frac{e^{-2R}}{4} + \frac{e^{-3R}}{9}\right),\end{aligned}$$

e il suo limite $R \to +\infty$ vale $e^{-2}/4 + e^{-3}/9$.