Esame scritto Matematica III, a.a. 2019/2020, quinto appello

Studenti di economia finanza e assicurazioni/statistica economia e società/statistica gestionale

1. Determinare il dominio di definizione della funzione di variabile reale:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+y^2}.$$

Dire se si tratti di un aperto, chiuso oppure nessuna delle due. Indicare la frontiera, l'interno e la chiusura. Le risposte non vanno giustificate.

Soluzione: Affinché la radice quadrata sia definita, il suo argomento deve essere ≥ 0; inoltre il denominatore della frazione non deve annullarsi, e quindi x^2+y^2 deve essere diverso da 0. Dalla prima condizione si ottiene $y \geq x^2$, mentre dalla seconda $(x,y) \neq (0,0)$. Il dominio di definizione è quindi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Osserviamo subito che il punto $(0,0)$ appartiene alla chiusura di D: in effetti è limite dei punti $(0,1/n), n \in \mathbb{N}$, che appartengono a D, ma non appartiene esso stesso a D. Pertanto D non è chiuso e

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

ne è la chiusura: è chiuso, contiene D ed è sicuramente il più piccolo chiuso che contiene D, poiché differisce da D per un solo punto.

L'insieme D non è aperto. Ad esempio, il punto $(1,1)$ appartiene a D, ma $(1,1-r)$ non appartiene a D per alcuna scelta di $r>0$. Questo mostra che nessun intorno sferico di $(1,1)$ è completamente contenuto in D. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per ogni (x,y) che soddisfi $y=x^2$: tali punti non sono interni a D. Tutti gli altri punti appartengono all'aperto

$$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

che è quindi la parte interna di D. La frontiera si ottiene per differenza insiemistica

$$\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}.$$

2. Determinare il più piccolo intero positivo m in modo tale che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(y^{\frac{m}{3}})}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammetta derivata derizionale in $(0,0)$ rispetto ad ogni versore (α, β).
Per tale valore di m la funzione f risulta continua in $(0,0)$? Risulta differenziabile? (Giustificare entrambe le risposte.)

Soluzione: Se $v = (\alpha, \beta)$ è un versore, cioè se la sua norma euclidea è 1, allora

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 t^2 \sin((\beta t)^{m/3})}{t^2} = \alpha^2 \sin\left(\beta^{m/3} t^{m/3}\right).$$

Il rapporto incrementale che calcola la derivata direzionale è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha^2 \sin\left(\beta^{m/3} t^{m/3}\right)}{t},$$

e ammette limite solo per $m \geq 3$. Per $m = 3$ le derivate direzionali esistono quindi tutte e valgono

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \alpha^2 \beta.$$

Si vede subito che entrambe le derivate parziali sono nulle: se f fosse differenziabile in 0, dovrebbero essere allora nulle tutte le derivate direzionali, il che non è. La funzione f non è pertanto differenziabile.

Per quanto riguarda la continuità, invece, se $m = 3$ allora $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos^2 \theta \sin(\rho \sin \theta)$ va a 0 quando $\rho \to 0$ per continuità della funzione seno. La funzione f è quindi continua in $(0,0)$.

3. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$$

dove $f(x, y, z) = x$ e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$.

Soluzione: Il dominio di integrazione è un ottante di una calotta sferica di raggio esterno 2 e raggio interno 1. Per una volta, le coordinate sferiche sembrano la scelta corretta.

Vi ricordo che le coordinate sferiche sono

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi), \end{cases}$$

dove $\rho \geq 0$ è la distanza dall'origine, $0 \leq \theta < 2\pi$ è la coordinata angolare polare della proiezione del nostro punto sul piano xy e $0 \leq \phi \leq \pi$ è l'angolo di *latitudine* calcolato partendo da 0 nel polo nord.

Il determinante Jacobiano del cambiamento di coordinate è $\rho^2 \sin(\phi)$, che non richiede un valore assoluto in quanto $\sin(\phi)$ è sempre ≥ 0 per i valori assunti da ϕ.

In coordinate sferiche, la regione diventa $1 \leq \rho \leq 2, \pi/2 \leq \phi \leq \pi, 3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ — a meno di un frammento di misura nulla che non incide sul valore dell'integrale.

L'integrale diventa quindi

$$\iiint_D \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

che si calcola più precisamente come

$$\left(\int_1^2 \rho^3 d\rho \right) \cdot \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2(\phi) d\phi \right) \cdot \left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \right) = \frac{15}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{15\pi}{16}.$$