Esame scritto Matematica III, a.a. 2019/2020, terzo appello

Studenti di economia finanza e assicurazioni/statistica economia e società/statistica gestionale

1. Determinare il dominio di definizione della funzione di variabile reale:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y}}{x}.$$

Dire se si tratti di un aperto, chiuso oppure nessuna delle due. Indicare la frontiera, l'interno e la chiusura. Le risposte non vanno giustificate.

Soluzione: Affinché la funzione sia definita, l'argomento della radice quadrata deve essere ≥ 0 e il denominatore diverso da 0. Il dominio di definizione della funzione è quindi $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y, x \neq 0\}$. L'insieme D non è né aperto, né chiuso. Non è aperto poiché, ad esempio, il punto $(1, 1)$ appartiene a D ma nessun suo intorno sferico è completamente contenuto in D; non è chiuso poiché, ad esempio, il punto $(0, 0)$ non appartiene a D ma ne è punto di accumulazione.

La parte interna è $D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y, x \neq 0\}$, la chiusura è $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$, mentre la frontiera è $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$. Si vede infatti subito che D° è aperto mentre $\overline{D}$ è chiuso; inoltre nessuno dei punti in $D \setminus D^\circ$, cioè quelli della forma $(x, x), x \in \mathbb{R}$, possiede un intorno sferico tutto contenuto in D. In modo simile, tutti i punti di $\overline{D} \setminus D$, cioè quelli della forma $(0, y), y \leq 0$, sono di accumulazione per D.

Per concludere, la frontiera è la differenza insiemistica $\overline{D} \setminus D^\circ$.

2. Determinare la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{x+y}+x^2-y^2-x-y$.

Soluzione: Innanzitutto, la funzione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, in quanto somma di composizioni di funzioni differenziabili; calcolarne i punti critici significa quindi trovare i punti nei quali si annulla il gradiente.

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + 2x - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} - 2y - 1.$$

Affinché si annullino entrambe, deve valere

$$1 - 2x = e^{x+y} = 2y + 1,$$

da cui $x + y = 0$. Tuttavia, se $x + y = 0$, allora $e^{x+y} = 1$, e per annullare le derivate parziali si deve avere $2x = 2y = 0$. L'unico punto critico di f è quindi $(0, 0)$.

E' facile calcolare l'Hessiano di f in questo punto. Poiché

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y} + 2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x+y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y} - 2, \quad (3)$$

$$(4)$$

si ottiene

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che non è definita. Pertanto, $(0, 0)$ è un punto di sella per f.

3. Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ |z| \leq 1\}$ e $f(x,y) = \frac{z^2}{x^2+y^2+1}$.

Soluzione: Il modo più semplice di calcolare l'integrale è passare a coordinate cilindriche, trascurando l'origine dove la funzione è comunque limitata.

La regione D diventa $D = \{(\rho,\theta,z)\,|\,0 < \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, -1 \leq z \leq 1\}$ e l'integrale, una volta incorporato il determinante dello Jacobiano della trasformazione di coordinate, si traduce in

$$\int_{-1}^{1} dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{z^2}{1+\rho^2}\rho\, d\rho = \left(\int_{-1}^{1} z^2\, dz\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\pi \ln(2)}{6}.$$