Compito di esonero di Calcolo Differenziale
per Informatica e Tecnologie Informatiche
19/01/2009
Proff. Davini-Badii-Nebbia

Esercizio 1. Studiamo il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 1) - \arctan x$$

(a) L'argomento del logaritmo è sempre positivo (maggiore o uguale ad 1) per ogni valore di x e la funzione arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$, dunque

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

(b) Simmetrie. La funzione non presenta simmetrie (non è ne' pari ne' dispari).

(c) Studiamo il comportamento di $f(x)$ agli estremi del dominio di definizione, cioè per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + 1) - \arctan x = \lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + 1) - \frac{\pi}{2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2 + 1) - \arctan x = \lim_{x\to-\infty} \log(x^2 + 1) + \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui, cioè della forma $y = mx + q$. Faccio il calcolo solo per $x \to +\infty$, l'altro caso è analogo. Il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo si ottiene tramite la formula

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 + 1) - \arctan x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x} = 0,$$

mentre il termine noto

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \big(\log(x^2 + 1) - \arctan x - 0 \cdot x\big) = +\infty.$$

Se ne deduce che non sono presenti asintoti obliqui.

(d) Derivata prima. La funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1/2$. La funzione f ha un minimo locale (e anche globale) in $x = 1/2$. Si ha

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(1/2) = \log(5/4) - \arctan(1/2) \simeq -0,24.$$

La funzione f non ha massimo, non essendo limitata superiormente.

(e) Derivata seconda. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2\,(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Dunque $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

Esercizio 2. **(a)** Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}})$$

Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi, visto che $(1+1/n)^{1/n} > 1$ per ogni n. Usando le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n}).$$

Ora il termine $\log(1+1/n)$ è infinitesimo per $n \to +\infty$; dobbiamo stimare con che velocità tende a 0 per capire se la serie converge o diverge. A questo scopo, ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

per dedurre che $\log(1+1/n)$ va a 0 con la stessa velocità di $1/n$. Dunque la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ e dunque converge. Detto altrimenti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1/n)\,\log(1+1/n)}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+1/n)}{1/n} = 1,$$

e dal criterio del confronto asintotico se ne deduce che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \log(1+\frac{1}{n})$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin(\frac{1}{e^n})$$

Si tratta di una serie a termini positivi, visto che $0 < 1/e^n < \pi/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizzando il criterio di confronto asintotico e ricordando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, si ottiene che la serie data ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

Infatti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin(1/e^n)}{n^2/e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/e^n)}{1/e^n} = 1.$$

Quest'ultima serie è convergente, come si deduce per esempio usando il criterio della radice n-esima:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/n}}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Esercizio 3. Per cercare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{2+x}$$

nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 2]$, andiamo a studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza studiando la derivata prima. La funzione $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in [-1, 0) \cup (0, 2]$ e risulta

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \frac{(2+x) - x}{(2+x)^2} = \frac{|x|}{x} \frac{2}{(2+x)^2},$$

cioè f è crescente in $(0, 2]$ e decrescente in $[-1, 0)$. Dunque $x = 0$ è punto di minimo locale (e anche assoluto), perciò

$$\min_{x\in[-1,2]} f(x) = f(0) = 0.$$

Il massimo sarà assunto in uno dei due estremi. Si ha $f(2) = 1/2$, $f(-1) = 1$, dunque

$$\max_{x \in [-1,2]} f(x) = f(-1) = 1.$$

La funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 2]$, dunque per il Teorema dei valori intermedi

$$\mathrm{Im}(f) = \left[\min_{[-1,2]} f, \max_{[-1,2]} f \right] = [0, 1].$$