Esonero di Calcolo Differenziale - 27 novembre 2008
Corso di Laurea in Informatica

TESTO E SOLUZIONI

COMPITO A

Esercizio 1. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$E = \left\{ 1 - \arctan\left(\frac{n^2+1}{2n}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.([1])

Svolgimento. Poniamo $a_n = \frac{n^2+1}{2n}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Verifichiamo che la disuguaglianza $a_{n+1} \geq a_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti essa è equivalente alla disuguaglianza

$$(n+1) + \frac{1}{n+1} \geq n + \frac{1}{n},$$

cioè

$$1 + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n}.$$

Mettendo a comune denominatore e semplificando i denominatori si ottiene

$$n(n+1) + n \geq n + 1,$$

cioè $n^2 + n \geq 1$ che è chiaramente vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiano dunque provato che la successione $(a_n)_n$ è crescente. Ora la funzione $\arctan(x)$ è strettamente crescente, dunque $1 - \arctan(a_n)$ è una successione decrescente. Inoltre $\lim_n a_n = +\infty$. Se ne deduce che

- $\sup E = 1 - \arctan(a_1) = 1 - \pi/4 = \max E$;
- $\inf E = \lim_n (1 - \arctan(a_n)) = 1 - \pi/2$.

[1] Ricordo che $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Infine, $\arctan(a_n) < \pi/2$ per ogni n, dunque E non ammette minimo.

Esercizio 2. Sia $f(x) = 2 + \sqrt{\arccos\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}\right)}$.

(a) Determinare il dominio di f.

(b) Verificare che f è strettamente decrescente.

(c) Verificare che l'immagine di f è $\big[2, 2+\sqrt{\pi/2}\big)$.

(d) Calcolare la funzione inversa di f.

Svolgimento. (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le seguenti relazioni:

$$x \neq 3, \quad x - 3 \geq 0, \quad -1 \leq \frac{x-3}{\sqrt{x-3}} \leq 1, \quad \arccos\left(\frac{x-3}{\sqrt{x-3}}\right) \geq 0.$$

Dalle prime due, abbiamo innanzitutto che $x > 3$. Studiamo le altre due relazioni. Poichè $x > 3$, la terza relazione diviene

$$0 < \frac{x-3}{\sqrt{x-3}} \leq 1.$$

Per $x > 3$, vale l'identità $x-3 = (\sqrt{x-3})^2$, per cui semplificando otteniamo

$$0 < \sqrt{x-3} \leq 1.$$

Elevando al quadrato si ottiene $3 < x \leq 4$. Dal momento che la funzione $\arccos(y)$ è sempre non negativa, la quarta diseguaglianza è sempre verificata. Dunque $\mathrm{dom}(f) = (3, 4]$.

(b) La funzione f si può scrivere nel seguente modo:

$$f(x) = 2 + \sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-3}\right)}, \qquad x \in (3, 4].$$

Osserviamo preliminarmente che le funzioni $\sqrt{\cdot}$ e $\arccos(\cdot)$ sono rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente sui loro domini di definizione. Siano x_1, $x_2 \in (3, 4]$. Allora

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1 - 3} < \sqrt{x_2 - 3} \;\Rightarrow\; \arccos\left(\sqrt{x_1-3}\right) > \arccos\left(\sqrt{x_2-3}\right)$$

da cui si ottiene

$$2+\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x_1-3}\right)}>2+\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x_2-3}\right)}$$

cioè $f(x_1)>f(x_2)$.

(c) e (d) Osserviamo preliminarmente che

$$f(4)=2, \quad \lim_{n\to+\infty} f(3+1/n^2)=\lim_{n\to+\infty} 2+\sqrt{\arccos(1/n)}=2+\sqrt{\pi/2}.$$

Poichè f è strettamente decrescente, per ogni $x\in(3,4]$ si ha

$$2+\sqrt{\pi/2}=\lim_{n\to+\infty} f(3+1/n^2)>f(x)\geq f(4)=2$$

cioè $f\left((3,4]\right)\subseteq\left[2,2+\sqrt{\pi/2}\,\right)$. Per dimostrare l'inclusione opposta andiamo a calcolarci l'inversa: fissiamo $y\in\left[2,2+\sqrt{\pi/2}\,\right)$ e andiamo a cercare il punto $x\in\ (3,4]$ tale che $f(x)=y$, cioè

$$2+\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-3}\right)}=y.$$

Si ha

$$\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-3}\right)}=y-2.$$

Dal momento che $y-2\geq 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente ottenendo

$$\arccos\left(\sqrt{x-3}\right)=(y-2)^2.$$

Componendo con la funzione cos ambo i membri di questa uguaglianza otteniamo

$$\sqrt{x-3}=\cos\left((y-2)^2\right)$$

Visto che $0\leq(y-2)^2<\pi/2$, il termine di destra è positivo e possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente. Risulta

$$x-3=\left(\cos\left((y-2)^2\right)\right)^2, \quad \text{cioè} \quad x=3+\left(\cos\left((y-2)^2\right)\right)^2.$$

Questo mostra che l'immagine di f coincide con l'intervallo $\left[2,2+\sqrt{\pi/2}\,\right)$ e ci dà la formula della funzione inversa f^{-1}, definita per ogni $y\in\left[2,2+\sqrt{\pi/2}\,\right)$ come

$$f^{-1}(y)=3+\left(\cos\left((y-2)^2\right)\right)^2.$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n^4 + 2 - 3^n n^2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right).$$

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che

$$a_n = \frac{n^4 + 2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right) - \frac{3^n\, n^2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right).$$

Razionalizzando, si ottiene

$$n^2 - \sqrt{n^4 + 2} = \frac{-2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2}},$$

in particolare la successione $(n^2 - \sqrt{n^4 + 2})_n$ tende a 0. Se ne deduce che $\sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right)$ tende a 0. Poichè anche $\frac{n^4+2}{3^n+2}$ tende a 0, si ha

$$\lim_n \frac{n^4 + 2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right) = 0.$$

Per calcolare il limite della seconda successione, sfruttiamo il limite notevole

$$\lim_n \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 2}}{-2} \sin\left(\frac{-2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2}}\right) = 1.$$

Dunque

$$\lim_n \frac{3^n\, n^2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right) = \lim_n \frac{3^n\, n^2}{3^n + 2} \frac{-2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 2}}$$
$$= \lim_n \frac{3^n}{3^n + 2} \frac{-2\, n^2}{n^2(1 + \sqrt{1 + 2/n^4})} = -1$$

Riassumendo,

$$\lim_n \frac{n^4 + 2 - 3^n n^2}{3^n + 2} \sin\left(n^2 - \sqrt{n^4 + 2}\right) = 1.$$

Esercizio 4. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{|x - 3| + 1}{x - 5}\right|}.$$

Svolgimento. Il dominio di g è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 5$ e

$$\frac{|x-3|+1}{|x-5|} \leq 1,$$

cioè

$$|x-3|+1 \leq |x-5|. \tag{1}$$

Lo studio dei segni delle espressioni che compaiono nei moduli ci porta a considerare tre casi.

1 caso: $x \leq 3$. La disuguaglianza (1) diviene

$$3-x+1 \leq 5-x,$$

cioè

$$3+1 \leq 5,$$

che è sempre verificata. Si conclude che la disuguaglianza (1) è verificata per ogni $x \leq 3$.

2 caso: $3 < x < 5$. La disuguaglianza (1) diviene

$$x-3+1 \leq 5-x,$$

cioè

$$x \leq \frac{3+5-1}{2}.$$

Dal momento che $\frac{3+5-1}{2} < 5$, si conclude che la disuguaglianza (1) è verificata per ogni $3 < x \leq \frac{7}{2}$.

3 caso: $x > 5$. La disuguaglianza (1) diviene

$$x-3+1 \leq x-5,$$

cioè $5-3+1 \leq 0$, che non è mai vera. Dunque per $x > 5$ la disuguaglianza (1) non è mai verificata.

Concludendo, $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 7/2]$.

COMPITO B

Esercizio 1. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$E = \left\{ 3 + \arctan \left(\frac{n^2 + 2}{3n} \right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.([2])

Svolgimento. Poniamo $a_n = \frac{n^2+2}{3n}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{3n}.$$

Verifichiamo che la disuguaglianza $a_{n+1} \geq a_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti essa è equivalente alla disuguaglianza

$$(n+1) + \frac{2}{n+1} \geq n + \frac{2}{n},$$

cioè

$$1 + \frac{2}{n+1} \geq \frac{2}{n}.$$

Mettendo a comune denominatore e semplificando i denominatori si ottiene

$$n(n+1) + 2n \geq 2(n+1),$$

cioè $n^2 + n \geq 2$, che è chiaramente vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiano dunque provato che la successione $(a_n)_n$ è crescente. Ora la funzione $\arctan(x)$ è strettamente crescente, dunque $3 + \arctan(a_n)$ è una successione crescente. Inoltre $\lim_n a_n = +\infty$. Se ne deduce che

- $\inf E = 3 + \arctan(a_1) = 3 + \pi/4 = \min E$;
- $\sup E = \lim_n (3 + \arctan(a_n)) = 3 + \pi/2$.

Infine, $\arctan(a_n) < \pi/2$ per ogni n, dunque E non ammette massimo.

Esercizio 2. Sia $f(x) = 1 + \sqrt{\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)}$.

(a) Determinare il dominio di f.

[2]Ricordo che $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

(b) Verificare che f è strettamente crescente.

(c) Verificare che l'immagine di f è $\left(1, 1+\sqrt{\pi/2}\ \right]$.

(d) Calcolare la funzione inversa di f.

Svolgimento. (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le seguenti relazioni:

$$x \neq 1, \quad x-1 \geq 0, \quad -1 \leq \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \leq 1, \quad \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right) \geq 0.$$

Dalle prime due, abbiamo innanzitutto che $x > 1$. Studiamo le altre due relazioni. Poichè $x > 1$, la terza relazione diviene

$$0 < \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \leq 1.$$

Per $x > 1$, vale l'identità $x-1 = (\sqrt{x-1})^2$, per cui semplificando otteniamo

$$0 < \sqrt{x-1} \leq 1.$$

Elevando al quadrato si ottiene $1 < x \leq 2$. Dal momento che la funzione $\arcsin(y)$ è positiva per $y > 0$, la quarta disuguaglianza è sempre vera per $x > 1$. Dunque $\mathrm{dom}(f) = (1, 2]$.

(b) La funzione f si può scrivere nel seguente modo:

$$f(x) = 1 + \sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)}, \qquad x \in (1, 2].$$

Osserviamo preliminarmente che le funzioni $\sqrt{\cdot}$ e $\arcsin(\cdot)$ sono strettamente crescenti sui loro rispettivi domini di definizione. Siano x_1, $x_2 \in (1, 2]$. Allora

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \ \Rightarrow\ \arcsin\left(\sqrt{x_1-1}\right) < \arcsin\left(\sqrt{x_2-1}\right)$$

da cui si ottiene

$$1 + \sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x_1-1}\right)} < 1 + \sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x_2-1}\right)}$$

cioè $f(x_1) < f(x_2)$.

(c) e (d) Osserviamo preliminarmente che

$$f(2) = 1 + \sqrt{\pi/2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(1 + 1/n^2) = \lim_{n\to+\infty} 1 + \sqrt{\arcsin(1/n)} = 1.$$

Poichè f è strettamente crescente, per ogni $x \in (1,2]$ si ha

$$1+\sqrt{\pi/2} = \lim_{n\to+\infty} f(1+1/n^2) < f(x) \leq f(2) = 2$$

cioè $f\left((1,2]\right) \subseteq [1, 1+\sqrt{\pi/2}\,)$. Per dimostrare l'inclusione opposta andiamo a calcolarci l'inversa: fissiamo $y \in [1, 1+\sqrt{\pi/2}\,)$ e andiamo a cercare il punto $x \in (1,2]$ tale che $f(x) = y$, cioè

$$1+\sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)} = y.$$

Si ha

$$\sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)} = y-1.$$

Dal momento che $y-1 \geq 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente ottenendo

$$\arcsin\left(\sqrt{x-1}\right) = (y-1)^2.$$

Componendo con la funzione sin ambo i membri di questa uguaglianza otteniamo

$$\sqrt{x-1} = \sin\left((y-1)^2\right)$$

Visto che $0 \leq (y-1)^2 < \pi/2$, il termine di destra è positivo e possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente. Risulta

$$x-1 = \left(\sin(y-1)^2\right)^2, \quad \text{cioè} \quad x = 1+\left(\sin(y-1)^2\right)^2.$$

Questo mostra che l'immagine di f coincide con l'intervallo $[1, 1+\sqrt{\pi/2}\,)$ e ci dà la formula della funzione inversa f^{-1}, definita per ogni $y \in [1, 1+\sqrt{\pi/2}\,)$ come

$$f^{-1}(y) = 1+\left(\sin(y-1)^2\right)^2.$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n^2+1-2^n n}{2^n+1}\,\tan\left(n-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che

$$a_n = \frac{n^2+1}{2^n+1}\,\tan\left(n-\sqrt{n^2+1}\right) - \frac{2^n\,n}{2^n+1}\,\tan\left(n-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Razionalizzando, si ottiene

$$n - \sqrt{n^2+1} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}},$$

in particolare la successione $(n - \sqrt{n^2+1})_n$ tende a 0. Se ne deduce che $\tan\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$ tende a 0. Poichè anche $\frac{n^2+1}{2^n+1}$ tende a 0, si ha

$$\lim_n \frac{n^2+1}{2^n+1}\ \tan\left(n - \sqrt{n^2+1}\right) = 0.$$

Per calcolare il limite della seconda successione, sfruttiamo il limite notevole

$$\lim_n \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{-1}\ \tan\left(\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}\right) = 1.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
&\lim_n \frac{2^n\, n}{2^n+1}\ \tan\left(n - \sqrt{n^2+1}\right) = \lim_n \frac{2^n\, n}{2^n+1}\ \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&= \lim_n \frac{2^n}{2^n+1}\ \frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_n \frac{2^n}{2^n(1+2^{-n})}\ \frac{-n}{n(1+\sqrt{1+1/n^2})} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Riassumendo,

$$\lim_n \frac{n^2+1-2^n n}{2^n+1}\ \tan\left(n - \sqrt{n^2+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{|x-4|+1}{x-6}\right|}.$$

Svolgimento. Il dominio di g è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 6$ e

$$\frac{|x-4|+1}{|x-6|} \leq 1,$$

cioè

$$|x-4|+1 \leq |x-6|. \tag{2}$$

Lo studio dei segni delle espressioni che compaiono nei moduli ci porta a considerare tre casi.

1 caso: $x \leq 4$**.** La disuguaglianza (2) diviene

$$4 - x + 1 \leq 6 - x,$$

cioè

$$4 + 1 \leq 6,$$

che è sempre vera. Si conclude che la disuguaglianza (2) è verificata per ogni $x \leq 4$.

2 caso: $4 < x < 6$**.** La disuguaglianza (2) diviene

$$x - 4 + 1 \leq 6 - x,$$

cioè

$$x \leq \frac{4 + 6 - 1}{2}.$$

Dal momento che $\frac{4+6-1}{2} < 6$ si conclude che la disuguaglianza (4) è verificata per ogni $4 < x \leq \frac{9}{2}$.

3 caso: $x > 6$**.** La disuguaglianza (2) diviene

$$x - 4 + 1 \leq x - 6,$$

cioè $6 - 4 + 1 \leq 0$, che non è mai vera. Dunque per $x > 6$ la disuguaglianza (2) non è mai verificata.

Concludendo, $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 9/2]$.

COMPITO C

Esercizio 1. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$E = \left\{ 2 + \arctan\left(\frac{n^2-3}{4n}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.([3])

Svolgimento. Poniamo $a_n = \frac{n^2-3}{4n}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{n}{4} - \frac{3}{4n}.$$

Verifichiamo che la disuguaglianza $a_{n+1} \geq a_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti essa è equivalente alla disuguaglianza

$$(n+1) - \frac{3}{n+1} \geq n - \frac{3}{n},$$

cioè

$$1 - \frac{3}{n+1} \geq -\frac{3}{n}.$$

Mettendo a comune denominatore e semplificando i denominatori si ottiene

$$n(n+1) - 3n \geq -3(n+1),$$

cioè $n^2 + n + 3 \geq 0$ che è chiaramente vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiano dunque provato che la successione $(a_n)_n$ è crescente. Ora la funzione $\arctan(x)$ è strettamente crescente, dunque $2 + \arctan(a_n)$ è una successione crescente. Inoltre $\lim_n a_n = +\infty$. Se ne deduce che

- $\inf E = 2 + \arctan(a_1) = 2 + \arctan(-1/2) = \min E$;
- $\sup E = \lim_n (2 + \arctan(a_n)) = 2 + \pi/2$.

Infine, $\arctan(a_n) < \pi/2$ per ogni n, dunque E non ammette massimo.

Esercizio 2. Sia $f(x) = 2 - \sqrt{\arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right)}$.

(a) Determinare il dominio di f.

[3]Ricordo che $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

(b) Verificare che f è strettamente decrescente.

(c) Verificare che l'immagine di f è $\big[2-\sqrt{\pi/2},\, 2\big)$.

(d) Calcolare la funzione inversa di f.

Svolgimento. (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le seguenti relazioni:

$$x \neq 2, \quad x-2 \geq 0, \quad -1 \leq \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \leq 1, \quad \arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}\right) \geq 0.$$

Dalle prime due, abbiamo innanzitutto che $x > 2$. Studiamo le altre due relazioni. Poichè $x > 2$, la terza relazione diviene

$$0 < \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \leq 1.$$

Per $x > 2$, vale l'identità $x-2 = (\sqrt{x-2})^2$, per cui semplificando otteniamo

$$0 < \sqrt{x-2} \leq 1.$$

Elevando al quadrato si ottiene $2 < x \leq 3$. Dal momento che la funzione $\arcsin(y)$ è positiva per $y > 0$, la quarta disuguaglianza è sempre vera per $x > 2$. Dunque $\mathrm{dom}(f) = (2,3]$.

(b) La funzione f si può scrivere nel seguente modo:

$$f(x) = 2 - \sqrt{\arcsin\big(\sqrt{x-2}\big)}, \qquad x \in (2,3].$$

Osserviamo preliminarmente che le funzioni $\sqrt{\cdot}$ e $\arcsin(\cdot)$ sono strettamente crescenti sui loro rispettivi domini di definizione. Siano $x_1,\, x_2 \in (2,3]$. Allora

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2} \;\Rightarrow\; \arcsin\big(\sqrt{x_1-2}\big) < \arcsin\big(\sqrt{x_2-2}\big)$$

da cui si ottiene

$$2 - \sqrt{\arcsin\big(\sqrt{x_1-2}\big)} > 2 - \sqrt{\arcsin\big(\sqrt{x_2-2}\big)}$$

cioè $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) e (d) Osserviamo preliminarmente che

$$f(3) = 2 - \sqrt{\pi/2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(2+1/n^2) = \lim_{n\to+\infty} 2 - \sqrt{\arcsin(1/n)} = 2.$$

Poichè f è strettamente decrescente, per ogni $x \in (2,3]$ si ha

$$2 = \lim_{n\to+\infty} f(2+1/n^2) > f(x) \geq f(3) = 2 - \sqrt{\pi/2}$$

cioè $f\left((2,3]\right) \subseteq [2-\sqrt{\pi/2},\, 2)$. Per dimostrare l'inclusione opposta andiamo a calcolarci l'inversa: fissiamo $y \in [2-\sqrt{\pi/2},\, 2)$ e andiamo a cercare il punto $x \in\ (2,3]$ tale che $f(x) = y$, cioè

$$2 - \sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x-2}\right)} = y.$$

Si ha

$$\sqrt{\arcsin\left(\sqrt{x-2}\right)} = 2 - y.$$

Dal momento che $2 - y \geq 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente ottenendo

$$\arcsin\left(\sqrt{x-2}\right) = (2-y)^2.$$

Componendo con la funzione sin ambo i membri di questa uguaglianza otteniamo

$$\sqrt{x-2} = \sin\left((2-y)^2\right)$$

Visto che $0 \leq (2-y)^2 < \pi/2$, il termine di destra è positivo e possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente. Risulta

$$x - 2 = \left(\sin(2-y)^2\right)^2, \quad \text{cioè} \quad x = 2 + \left(\sin(2-y)^2\right)^2.$$

Questo mostra che l'immagine di f coincide con l'intervallo $[2-\sqrt{\pi/2},\, 2)$ e ci dà la formula della funzione inversa f^{-1}, definita per ogni $y \in [2-\sqrt{\pi/2},\, 2)$ come

$$f^{-1}(y) = 2 + \left(\sin(2-y)^2\right)^2.$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n^2 + 7 - 5^n n}{5^n + 4} \sin\left(n - \sqrt{n^2+4}\right).$$

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che

$$a_n = \frac{n^2+7}{5^n+4} \sin\left(n - \sqrt{n^2+4}\right) - \frac{5^n\, n}{5^n+4} \sin\left(n - \sqrt{n^2+4}\right).$$

Razionalizzando, si ottiene

$$n - \sqrt{n^2+4} = \frac{-4}{n+\sqrt{n^2+4}},$$

in particolare la successione $(n-\sqrt{n^2+4})_n$ tende a 0. Se ne deduce che $\sin\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)$ tende a 0. Poichè anche $\frac{n^2+7}{5^n+4}$ tende a 0, si ha

$$\lim_n \frac{n^2+7}{5^n+4}\ \sin\left(n-\sqrt{n^2+4}\right) = 0.$$

Per calcolare il limite della seconda successione, sfruttiamo il limite notevole

$$\lim_n \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{-4}\ \sin\left(\frac{-4}{n+\sqrt{n^2+4}}\right) = 1.$$

Dunque

$$\lim_n \frac{5^n\,n}{5^n+4}\ \sin\left(n-\sqrt{n^2+4}\right) = \lim_n \frac{5^n\,n}{5^n+4}\,\frac{-4}{n+\sqrt{n^2+4}}$$
$$= \lim_n \frac{5^n}{5^n+4}\,\frac{-4n}{n(1+\sqrt{1+4/n^2})} = -2.$$

Riassumendo,

$$\lim_n \frac{n^2+7-5^n n}{5^n+4}\ \sin\left(n-\sqrt{n^2+4}\right) = 2.$$

Esercizio 4. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{1-\left|\frac{|x-5|+1}{x-7}\right|}.$$

Svolgimento. Il dominio di g è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 7$ e

$$\frac{|x-5|+1}{|x-7|} \leq 1,$$

cioè

$$|x-5|+1 \leq |x-7|. \tag{3}$$

Lo studio dei segni delle espressioni che compaiono nei moduli ci porta a considerare tre casi.

1 caso: $x \leq 5$. La disuguaglianza (3) diviene

$$5 - x + 1 \leq 7 - x,$$

cioè

$$5 + 1 \leq 7.$$

Dal momento che $\frac{5+7+1}{2} > 5$ e la seconda disuguaglianza è sempre vera si conclude che la disuguaglianza (3) è verificata per ogni $x \leq 5$.

2 caso: $5 < x < 7$. La disuguaglianza (3) diviene

$$x - 5 + 1 \leq 7 - x,$$

cioè

$$x \leq \frac{5 + 7 - 1}{2}$$

Dal momento che $\frac{5+7-1}{2} < 7$ si conclude che la disuguaglianza (3) è verificata per ogni $5 < x \leq \frac{11}{2}$.

3 caso: $x > 7$. La disuguaglianza (3) diviene

$$x - 5 + 1 \leq x - 7,$$

cioè $7 - 5 + 1 \leq 0$, che non è mai vera. Dunque per $x > 7$ la disuguaglianza (3) non è mai verificata.

Concludendo, $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 11/2]$.

COMPITO D

Esercizio 1. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$E = \left\{ 4 - \arctan\left(\frac{n^2-4}{5n}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.([4])

Svolgimento. Poniamo $a_n = \frac{n^2-4}{5n}$ e osserviamo che

$$a_n = \frac{n}{5} - \frac{4}{5n}.$$

Verifichiamo che la disuguaglianza $a_{n+1} \geq a_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti essa è equivalente alla disuguaglianza

$$(n+1) - \frac{4}{n+1} \geq n - \frac{4}{n},$$

cioè

$$1 - \frac{4}{n+1} \geq -\frac{4}{n}.$$

Mettendo a comune denominatore e semplificando i denominatori si ottiene

$$n(n+1) - 4n \geq -4(n+1),$$

cioè $n^2 + n + 4 \geq 0$ che è chiaramente vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiano dunque provato che la successione $(a_n)_n$ è crescente. Ora la funzione $\arctan(x)$ è strettamente crescente, dunque $4 - \arctan(a_n)$ è una successione decrescente. Inoltre $\lim_n a_n = +\infty$. Se ne deduce che

- $\sup E = 4 - \arctan(a_1) = 4 - \arctan(-3/5) = \min E$;
- $\inf E = \lim_n (4 - \arctan(a_n)) = 4 - \pi/2$.

Infine, $\arctan(a_n) < \pi/2$ per ogni n, dunque E non ammette minimo.

Esercizio 2. Sia $f(x) = 3 - \sqrt{\arccos\left(\frac{x-4}{\sqrt{x-4}}\right)}$.

(a) Determinare il dominio di f.

[4] Ricordo che $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

(b) Verificare che f è strettamente crescente.

(c) Verificare che l'immagine di f è $\left(3-\sqrt{\pi/2},\, 3\right]$.

(d) Calcolare la funzione inversa di f.

Svolgimento. (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le seguenti relazioni:

$$x \neq 4, \quad x-4 \geq 0, \quad -1 \leq \frac{x-4}{\sqrt{x-4}} \leq 1, \quad \arccos\left(\frac{x-4}{\sqrt{x-4}}\right) \geq 0.$$

Dalle prime due, abbiamo innanzitutto che $x > 4$. Studiamo le altre due relazioni. Poichè $x > 4$, la terza relazione diviene

$$0 < \frac{x-4}{\sqrt{x-4}} \leq 1.$$

Per $x > 4$, vale l'identità $x-4 = (\sqrt{x-4})^2$, per cui semplificando otteniamo

$$0 < \sqrt{x-4} \leq 1.$$

Elevando al quadrato si ottiene $4 < x \leq 5$. Dal momento che la funzione $\arccos(y)$ è sempre non negativa, la quarta diseguaglianza è sempre verificata. Dunque $\mathrm{dom}(f) = (4,5]$.

(b) La funzione f si può scrivere nel seguente modo:

$$f(x) = 3 - \sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-4}\right)}, \qquad x \in (4,5].$$

Osserviamo preliminarmente che le funzioni $\sqrt{\cdot}$ e $\arccos(\cdot)$ sono rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente sui loro domini di definizione. Siano $x_1,\, x_2 \in (3,4]$. Allora

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1-4} < \sqrt{x_2-4} \;\Rightarrow\; \arccos\left(\sqrt{x_1-4}\right) > \arccos\left(\sqrt{x_2-4}\right)$$

da cui si ottiene

$$3 - \sqrt{\arccos\left(\sqrt{x_1-4}\right)} < 3 - \sqrt{\arccos\left(\sqrt{x_2-4}\right)}$$

cioè $f(x_1) < f(x_2)$.

(c) e (d) Osserviamo preliminarmente che

$$f(5) = 3, \quad \lim_{n\to+\infty} f(4+1/n^2) = \lim_{n\to+\infty} 3 - \sqrt{\arccos(1/n)} = 3 - \sqrt{\pi/2}.$$

Poichè f è strettamente crescente, per ogni $x \in (4,5]$ si ha

$$3-\sqrt{\pi/2}=\lim_{n\to+\infty} f(4+1/n^2) < f(x) \leq f(5) = 3$$

cioè $f\left((4,5]\right) \subseteq (3-\sqrt{\pi/2}, 3\,]$. Per dimostrare l'inclusione opposta andiamo a calcolarci l'inversa: fissiamo $y \in (3-\sqrt{\pi/2}, 3\,]$ e andiamo a cercare il punto $x \in (4,5]$ tale che $f(x)=y$, cioè

$$3-\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-4}\right)} = y.$$

Si ha

$$\sqrt{\arccos\left(\sqrt{x-4}\right)} = 3-y.$$

Dal momento che $3-y \geq 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente ottenendo

$$\arccos\left(\sqrt{x-4}\right) = (3-y)^2.$$

Componendo con la funzione cos ambo i membri di questa uguaglianza otteniamo

$$\sqrt{x-4} = \cos\left((3-y)^2\right).$$

Visto che $0 \leq (3-y)^2 < \pi/2$, il termine di destra è positivo e possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza precedente. Risulta

$$x-4 = \left(\cos(3-y)^2\right)^2, \quad \text{cioè} \quad x = 4+\left(\cos(3-y)^2\right)^2.$$

Questo mostra che l'immagine di f coincide con l'intervallo $(3-\sqrt{\pi/2}, 3\,]$ e ci dà la formula della funzione inversa f^{-1}, definita per ogni $y \in (3-\sqrt{\pi/2}, 3\,]$ come

$$f^{-1}(y) = 4+\left(\cos(3-y)^2\right)^2.$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n^4+9-4^n n^2}{4^n+3}\tan\left(n^2-\sqrt{n^4+3}\right).$$

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che

$$a_n = \frac{n^4+9}{4^n+3}\tan\left(n^2-\sqrt{n^4+3}\right) - \frac{4^n\,n^2}{4^n+3}\tan\left(n^2-\sqrt{n^4+3}\right).$$

Razionalizzando, si ottiene

$$n^2 - \sqrt{n^4+3} = \frac{-3}{n^2 + \sqrt{n^4+3}},$$

in particolare la successione $(n^2 - \sqrt{n^4+3})_n$ tende a 0. Se ne deduce che $\tan\left(n^2 - \sqrt{n^4+3}\right)$ tende a 0. Poichè anche $\frac{n^4+9}{4^n+3}$ tende a 0, si ha

$$\lim_n \frac{n^4+9}{4^n+3}\ \tan\left(n^2 - \sqrt{n^4+3}\right) = 0.$$

Per calcolare il limite della seconda successione, sfruttiamo il limite notevole

$$\lim_n \frac{n^2+\sqrt{n^4+3}}{-3}\ \tan\left(\frac{-3}{n^2+\sqrt{n^4+3}}\right) = 1.$$

Dunque

$$\lim_n \frac{4^n\, n^2}{4^n+3}\ \tan\left(n^2 - \sqrt{n^4+3}\right) = \lim_n \frac{4^n\, n^2}{4^n+3}\,\frac{-3}{n^2+\sqrt{n^4+3}}$$
$$= \frac{4^n}{4^n+3}\,\frac{-3n^2}{n^2(1+\sqrt{1+3/n^4})} = -\frac{3}{2}.$$

Riassumendo,

$$\lim_n \frac{n^4+9-4^n n^2}{4^n+3}\ \tan\left(n^2 - \sqrt{n^4+3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{1 - \left|\frac{|x-6|+1}{x-8}\right|}.$$

Svolgimento. Il dominio di g è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 8$ e

$$\frac{|x-6|+1}{|x-8|} \leq 1,$$

cioè

$$|x-6|+1 \leq |x-8|. \tag{4}$$

Lo studio dei segni delle espressioni che compaiono nei moduli ci porta a considerare tre casi.

1 caso: $x \leq 6$. La disuguaglianza (4) diviene

$$6 - x + 1 \leq 8 - x,$$

cioè

$$6 + 1 \leq 8,$$

che è sempre vera. Si conclude che la disuguaglianza (4) è verificata per ogni $x \leq 6$.

2 caso: $6 < x < 8$. La disuguaglianza (4) diviene

$$x - 6 + 1 \leq 8 - x,$$

cioè

$$x \leq \frac{6 + 8 - 1}{2}.$$

Dal momento che $\frac{6+8-1}{2} < 8$ si conclude che la disuguaglianza (4) è verificata per ogni $6 < x \leq \frac{13}{2}$.

3 caso: $x > 8$. La disuguaglianza (4) diviene

$$x - 6 + 1 \leq x - 8,$$

cioè $8 - 6 + 1 \leq 0$, che non è mai vera. Dunque per $x > 8$ la disuguaglianza (4) non è mai verificata.

Concludendo, $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 13/2]$.