Compito d'esame di Calcolo Differenziale per Informatica e Tecnologie Informatiche
13/02/2009
Proff. A. Davini, M. Badii, C.Nebbia.

Esercizio 1. Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

(a) Dominio. Dobbiamo richiedere

$$x \neq 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x+1}{x-1} > 0,$$

da cui risulta $x < -1$ oppure $x > 1$. Quindi

$$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

(b) Simmetrie. La funzione è dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$. Infatti

$$f(-x) = \log\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \log\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}\right) = -f(x).$$

Dunque sarà sufficiente studiare la funzione per $x > 1$; il grafico di f per $x < -1$ si ottiene per simmetria rispetto all'origine degli assi.

(c) Studiamo il comportamento di f agli estremi dell'intervallo $(1, +\infty)$, cioè

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= +\infty, \\
\lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \log(1) = 0.
\end{aligned}$$

Dunque $f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = 1$ e asintoto orizzantale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$.

(d) Derivata prima. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+1}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)' = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

Dunque $f'(x) < 0$ per $x > 1$ (la funzione è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$).

(d) Derivata seconda. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)}$$

dunque $f''(x) > 0$ per $x > 1$ (la funzione è convessa in $(1, +\infty)$). La funzione non ha flessi.

Esercizio 2. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$$

è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = +\infty,$$

visto che il numeratore tende a $+\infty$ e il denominatore ad e. Dal momento che il limite risulta maggiore di 1, concludiamo che la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

cercando di ricondurci al limite notevole suggerito. Raccogliamo un x^2 a numeratore e denominatore nell'argomento del logaritmo, semplifichiamo e poi usiamo le proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{x^2(1+1/x^2)}{x^2(1-1/x^2)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x^2\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Con la sostituzione $t = 1/x^2$ e $s = -1/x^2$ nei limiti seguenti, otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{s\to 0^-} \frac{\log(1+s)}{s} = 1,$$

Si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 2.$$

Esercizio 4. La funzione

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} e^{-x}$$

è continua e derivabile in tutto l'intervallo $[0, 2]$. Per determinare massimi e minimi, andiamo a determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$ studiando il segno della sua derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \left(\frac{x}{2x+1}\right)' e^{-x} - \frac{x}{2x+1} e^{-x} = \left(\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} - \frac{x}{2x+1}\right) e^{-x},$$

cioè

$$f'(x) = -\frac{2x^2+x-1}{(2x+1)^2}$$

Studiando il segno del denominatore, si ottiene che

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad -1 \leq x \leq 1/2.$$

Dunque, nell'intervallo $[0, 2]$, la funzione sarà crescente in $[0,\ 1/2]$ e decrescente in $[1/2,\ 2]$. Il punto $x = 1/2$ è un punto di massimo locale, ed è anche di massimo globale per $f(x)$ in $[0, 2]$, perciò

$$\max_{x\in[0,2]} f(x) = f(1/2) = \frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

Il minimo sarà assunto in uno dei due estremi, e si verifica facilmente che $f(0) = 0 < f(2)$. Dunque

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f(0) = 0.$$

Infine, dal momento che $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,2]$, dal Teorema dei valori intermedi si ha che

$$\mathrm{Im}(f) = \left[\min_{[0,2]} f,\ \max_{[0,2]} f \right] = \left[0,\ \frac{1}{4\sqrt{e}} \right].$$

Esercizio 5. La funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}$$

è definita se e solo se $x \geq 0$, cioè $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$.

Per vedere se la funzione è derivabile in 0, dobbiamo controllare se esiste finito il limite del rapporto incrementale in $x = 0$. In questo caso, ci limitiamo a calcolare il limite destro in 0, dal momento che a sinistra di 0 la funzione non è definita. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che il primo limite è uguale a 1 (limite notevole). Poichè il limite del rapporto incrementale non è finito, concludiamo che la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$.