

**Compito d'esame di Calcolo Differenziale e di Calcolo Integrale per
Informatica
e Tecnologie Informatiche
16/09/2008
Proff. M. Badii, C.Cassisa, C.Nebbia, P.Vernole.**

Calcolo Differenziale

Es.n.1

Studiare il grafico della funzione seguente (è richiesto lo studio della derivata seconda):

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$$

Es.n.2

Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$$

Es.n.3

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calcolo Integrale

Es. n. 1

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$$

Es. n. 2

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+1) \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Es. n. 3

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + x$$

Prova scritta di Calcolo Differenziale
del 25/6/2008
(Comm. M.Badii-C.Cassisa-C.Nebbia)

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

calcolare le derivate prime e seconde e disegnarne il grafico.

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg}(x)}{\log(1+3x^2)}$$

3. Studiare la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n!)}{n^2+1}$$

4. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}x - e^{-x^2}$$

si annulla una ed una sola volta nel suo insieme di definizione.

5. Studiare l'insieme di derivazione e calcolare la derivata di

$$f(x) = \cos(\sqrt{x^2-1})$$

Prova scritta di calcolo Differenziale
del
18/2/2008
(Comm. M.Badii-C.Cassisa-C.Nebbia)

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{(2x-x^2)}$$

non è richiesto lo studio della derivata seconda.

2. Studiare la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 3} - n) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

3. Studiare la continuità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) \left\{ \begin{array}{l} = \frac{x}{1 + e^{1/x}}, x \neq 0 \\ = 0, x = 0 \end{array} \right\}$$

4. Calcolare il massimo ed il minimo assoluti in $[\frac{1}{e}, 2]$ della funzione

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

Prova scritta di Calcolo Differenziale
del
23/1/2008
(Commissione M.Badii-C.Cassisa-C.Nebbia)

1. Data la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{x^2 - x}$$

determinare

l'insieme di definizione, eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità, gli intervalli di crescita e decrescenza, massimi e minimi e tracciarne il grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda

2. Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^3 + n\sqrt{n} + 1}$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

4. Calcolare il massimo e minimo assoluti e l'immagine della funzione

$$f(x) = e^{-x}(x+1)^2$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

**Secondo compito di esonero di Calcolo Differenziale per Informatica e
Tecnologie Informatiche**

14/01/07
Canale E-O

Es.n.1

Studiare il grafico della seguente funzione (insieme di definizione e insieme di derivabilita', asintoti, derivata prima e seconda, massimi e minimi locali, flessi...):

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$$

Es.n.2

Dire se le serie seguenti sono convergenti o divergenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + \sqrt{n} + 1}{n^3 - n}$$

Es. n.3

Calcolare l'insieme di definizione e la derivata prima della seguente funzione.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 - x^2}$$

Prova intermedia di Calcolo Differenziale

Canale E-O (Prof. C.Nebbia)

12/11/07

Compito B

Es. n. 1.

Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x|1-2x|}}$$

Es. n.2.

Calcolare i due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)(1-\cos(x-1))}{x(1-x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+x}}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+3}}$$

Es. n. 3.

Calcolare i seguenti limiti immediati (non sono forme indeterminate):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sqrt{x}+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 1}{7x^2 - x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Esercizio facoltativo.

Calcolare i limiti, agli estremi degli intervalli in cui è definita, della funzione dell'esercizio n. 1.

**PROVA SCRITTA PER INFORMATICA E
TECNOLOGIE INFORMATICHE**

17/09/07

Prof. M.Badii, C. Nebbia, A. Siconolfi e P.Vernole

Calcolo Differenziale

Es.n°1.

Studiare la funzione:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(x + 2)$$

a) Si richiedono: la derivata prima e seconda, intervalli in cui la funzione è crescente e decrescente, massimi e minimi, convessità concavità e flessi, il disegno del grafico.

b) La funzione è derivabile in zero?

Es.n°2.

Studiare i due limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 3}\right)$$

Es.n°3.

Studiare le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^{-n}}{n+1}$$

.Calcolo Integrale

Es.n°1.

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - 1)(1 + \sin^2 x)} dx$$

Es.n°2.

Per quali $\alpha > 0$ converge e per quali diverge il seguente integrale improprio ?

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Es.n.°3.

Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 10y = 100x^2$$

Prova scritta di Calcolo Differenziale
del
6/7/2007
(Comm. M. Badii-C. Nebbia)

1. Sia

$$f(x) = (x^2 - 4x - 2)e^{-(x^2+2x)}$$

trovare: l'insieme di definizione; eventuali asintoti; gli insiemi di crescita e decrescita; i punti di eventuali massimi e minimi ; disegnarne il grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{e^{3x} - 1}$$

3. Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$$

4. Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali è continua in $x = 0$ la funzione

$$f(x) \left\{ \begin{array}{l} = \frac{e^x - 1}{\sin 3x}, x > 0 \\ a(x + 1), x < 0 \end{array} \right\}$$

5. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = x^{\log x}$$

Prova scritta di Calcolo Differenziale
del
22/6/2007
(Comm. M. Badii-C. Nebbia-P. Vernole)

1. Sia

$$f(x) = \log^2 x - \log x$$

trovare: l'insieme di definizione; eventuali asintoti; gli insiemi di crescita e decrescenza; i punti di eventuali massimi e minimi ; insiemi di concavità e convessità ed eventuali flessi e disegnarne il grafico

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

3. Per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

4. Trovare il valore di c che verifica il teorema di Lagrange per la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

nell'intervallo $[1, 3]$

5. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-1/x^2}}, \quad x > 0$$

calcolare la derivata prima, dimostrare che $f(x)$ è strettamente decrescente e determinare l'espressione dell'inversa

**Compito di esame di Calcolo Differenziale per Informatica e
Tecnologie Informatiche**

19/02/07

Comm. Badii-Nebbia-Vernole

Es.n.1 (8 punti)

Studiare il grafico della seguente funzione (insieme di definizione e insieme di derivabilita', asintoti, derivata prima e seconda, massimi e minimi locali, flessi...):

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Es.n.2 (6 punti)

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2+x^2})$$

Es.n.3 (3punti + 3punti)

Dire se le serie seguenti sono convergenti o divergenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n}))\sqrt{n}$$

Es. n. 4 (6 punti)

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x & x \leq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di a e b la f e' continua in 0; e per quali valori e' derivabile in 0?

Es.n. 5 (6 punti)

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = x^x$$

nel punto x=1.

**Compito di esame di Calcolo Differenziale per Informatica e
Tecnologie Informatiche
06/02/07
(Commissione Badii-Nebbia)**

Es.n.1. (8 punti)

Studiare il grafico della seguente funzione (compreso lo studio della derivata seconda):

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$$

Es.n.2. (3 punti+3 punti)

Calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{x^{\frac{5}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

Es.n.3. (6 punti)

Calcolare i valori di a e b affinché la seguente funzione abbia limite finito e diverso da zero al tendere di x a zero:

$$f(x) = \frac{a(\sin x)^2 + (a + b)(1 - \cos x) + (b - 1)x}{x^2}$$

Es.n.4. (6 punti)

Calcolare la derivata della funzione seguente:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Es. n.5 (3 punti + 3 punti)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log(\log n)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n}{n + 2^n}$$

**Compito di esame di Calcolo Differenziale per Informatica e
Tecnologie Informatiche**

25/01/07

(Commissione Badii-Nebbia-Vernole)

Es.n.1. (7 punti)

Studiare il grafico della seguente funzione (non e' richiesto lo studio della derivata seconda):

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{x^2-4x}$$

Es.n.2. (6 punti)

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

Es.n.3. (6 punti)

Dimostrare (utilizzando il teorema di Lagrange) che vale la disuguaglianza seguente per ogni x ed y maggiori o uguali a 0.

$$\left| \frac{\sin x}{e^x} - \frac{\sin y}{e^y} \right| \leq 2|x-y|$$

Es.n.4. (6 punti)

Quante volte e' derivabile in zero la seguente funzione? (motivare la risposta)

$$f(x) = |x| \arctan x$$

Es. n.5 (4 punti la prima serie + 3 punti la seconda)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n}{3^n + \log n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$$

Prova intermedia di Calcolo Differenziale

Canale E-O (Prof. C.Nebbia)

7/11/06

Compito D

Es. n. 1.

Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(x - \log(x - 2))}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Es. n.2.

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \sqrt{x^2 - x}}{x}$$

Es. n. 3.

Calcolare i seguenti limiti immediati:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{1 + x - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + x^4}{1 + 2x - 3x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^4 + x^2)}{\log(x^2 + x)}$$

Prova scritta di Calcolo Differenziale
del
5/7/2006
Comm. M.Badii-C.Nebbia-A.Pisante

1. Studiare la funzione

$$f(x) = (2x + 1)e^{1/x}$$

tracciandone il grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Ponendo $f(0) = 0$, la funzione è derivabile in $x = 0$?

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{4x + \sin x}$$

3. Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

4. Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{1 + |\log x|}$$

e studiare il segno della derivata prima dove esiste.

5. Provare che la funzione

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

è costante in $(0, +\infty)$. Trovare il valore di questa costante.