OMOGENEIZZAZIONE DI EQUAZIONI DI HAMILTON–JACOBI

ANDREA DAVINI

Abstract. L'interesse per l'omogeneizzazione di equazioni di Hamilton–Jacobi ha inizio con il celebre lavoro del 1987 di Lions, Papanicolau e Varadhan [16] nel caso periodico. Questo studio ha dato origine ad un ricco filone di ricerca, caratterizzato dalla scoperta di sorprendenti collegamenti con tematiche apparentemente assai lontane. La nozione di valore critico, ad esempio, su cui si basa la definizione di Hamiltoniana effettiva, era ben nota in ambito dinamico, ed una ricca analisi qualitativa era già disponibile. I collegamenti tra gli aspetti PDE e quelli dinamici sono stati poi approfonditi da Albert Fathi nell'ambito della teoria KAM debole [11].

I risultati di Lions, Papanicolau e Varadhan sono stati, nel corso del ventennio successivo, generalizzati in varie direzioni. Ci limitiamo qui a ricordare l'estensione al caso almost-periodic, dovuto ad Arisawa [1] e ad Ishii [14], e a quello stazionario ergodico, con i lavori di Souganidis [18], Rezhakanlou e Tarver [17].

Lo scopo di questo corso è quello di illustrare i principali risultati di omogeneizzazione per equazioni di Hamilton–Jacobi, con particolare attenzione agli aspetti variazionali e metrici. Dopo una breve introduzione sulla teoria delle soluzioni di viscosità, ci concentreremo sull'omogeneizzazione periodica e spiegheremo il ruolo dell'equazione di cella, un'equazione di H-J stazionaria di tipo eikonale, il cui studio è particolarmente rilevante ai fini dell'omogeneizzazione. Illustreremo come uno studio qualitativo di tale equazione possa essere condotto con tecniche metriche, cioè associando all'equazione una sorta di semidistanza di tipo Finsleriano e andandone a studiare le proprietà, quale, ad esempio, quella di essere o meno equivalente alla metrica euclidea.

Nell'ultima parte del corso presenteremo alcune generalizzazioni dei risultati e delle tecniche al caso di Hamiltoniane almost–periodiche e stazionarie ergodiche, e accenneremo ad alcuni problemi aperti in questo ambito.

Durata del corso: 30 ore, 3–4 ore a settimana

Programma del corso

1. Richiami sulle soluzioni di viscosità
2. Equazioni di Hamilton–Jacobi evolutive
    2.1 Risultati di esistenza e unicità delle soluzioni
    2.2 Caso convesso: semigruppo e formula di Lax–Oleinik
3. Omogeneizzazione per Hamiltoniane periodiche
    3.1 Descrizione del problema e risultato di omogeneizzazione
    3.2 Il problema di cella
    3.2 Il metodo della funzione test perturbata di Evans
4. Studio qualitativo del problema di cella (o equazione critica)
    4.1 Approccio metrico

References

[1] M. Arisawa, Multiscale homogenization for first-order Hamilton-Jacobi equations. Proceedings of the workshop on Nonlinear P.D.E., Saitama University, 1998.

[2] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[3] G. Barles, Solutions de viscositè des équations de Hamilton–Jacobi. Mathématiques & Applications, 17. Springer–Verlag, Paris, 1994.

[4] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, One–dimensional variational problems. An introduction. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **15**. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[5] G. Contreras, R. Iturriaga, Global Minimizers of Autonomous Lagrangians. 22nd Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.

[6] A. Davini, A. Siconolfi, Exact and approximate correctors for stochastic Hamiltonians: the 1–dimensional case, *Preprint* (2008).

[7] A. Davini, A. Siconolfi, A metric analysis of critical Hamilton–Jacobi equations in the stationary ergodic setting. Preprint (2008).

[8] A. Davini, A. Siconolfi, Weak KAM Theory topics in the stationary ergodic setting. Preprint (2009).

[9] L.C. Evans, The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **111** (1989), no. 3-4, 359–375.

[10] L.C. Evans, Periodic homogenisation of certain fully nonlinear partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **120** (1992), no. 3-4, 245–265.

[11] A. Fathi, Weak Kam Theorem in Lagrangian Dynamics. Cambridge University Press, *to appear.*

[12] A. Fathi, A. Siconolfi, Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation. *Invent. Math.* 155 (2004), no. 2, 363-388.

[13] A. Fathi, A. Siconolfi, PDE aspects of Aubry–Mather theory for continuous convex Hamiltonians. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **22**, no. 2 (2005) 185–228.

[14] H. Ishii, Almost periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations. International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 600–605, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[15] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, Homogenization of differential operators and integral functionals. Translated from the Russian by G.A. Yosifian. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[16] P.L. Lions, G. Papanicolau, S.R.S. Varadhan, Homogenization of Hamilton–Jacobi equations, unpublished preprint (1987).

[17] F. Rezakhanlou, J. E. Tarver, Homogenization for stochastic Hamilton-Jacobi equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **151** (2000), no. 4, 277–309.

[18] P. E. Souganidis, Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations and some applications. *Asymptot. Anal.* **20** (1999), no. 1, 1–11.