Corsi di Laurea in Scienze Naturali

Istituzioni di Matematica – a.a. 2009-2010 - Foglio 1

1.1 Esercizio

Trovare dominio e immagine delle seguenti funzioni:

$$f(x) = -\sqrt{x-4}; \quad g(x) = 1 + \sqrt[5]{x}; \quad h(x) = \frac{x}{x-1}; \; k(x) = \log(\cos x).$$

1.2 Esercizio

Trovare $f \circ g$, $g \circ f$ e specificare il loro dominio di definizione nei seguenti casi:

1. $f(x) = 3x^2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1};$
2. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sin x;$
3. $f(x) = \log x, \quad g(x) = x+1;$
4. $f(x) = \log(1-x), \quad g(x) = \dfrac{4x}{x^2+3};$
5. $f(x) = \sqrt{\log x}, \quad g(x) = \dfrac{x^2-1}{x};$
6. $f(x) = \arcsin(2-x^2), \quad g(x) = \tan(x).$

1.3 Esercizio

Per ciascuna delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = 3^{x^3+x}$$

dire se è invertibile e, in caso affermativo, indicarne il dominio dell'inversa.

1.4 Esercizio

Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right);$
2. $f(x) = \sqrt{\arctan\left(\dfrac{x+2}{x}\right)};$
3. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \log(1-x^2);$
4. $f(x) = \arccos\left(1 - \dfrac{x^2-1}{x}\right);$
5. $f(x) = \tan\left(\arccos\left(\dfrac{x}{x+2}\right)\right);$

1.5 Esercizio

Dire quali delle funzioni dell'esercizio precedente sono invertibili. Esaminare se le funzioni date sono monotone.

1.6 Esercizio

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indichiamo con $f \cdot g$ la funzione prodotto, cioè

$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare le seguenti implicazioni:

1. f pari, g pari $\implies$ $g \cdot f$ pari;
2. f dispari, g pari $\implies$ $g \cdot f$ dispari;
3. f dispari, g dispari $\implies$ $g \cdot f$ pari.

1.7 Esercizio

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimostrare le seguenti implicazioni:

1. f pari $\implies$ $g \circ f$ pari;
2. f dispari, g pari $\implies$ $g \circ f$ pari;
3. f dispari, g dispari $\implies$ $g \circ f$ dispari.

1.8 Esercizio

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimostrare le seguenti implicazioni:

1. f crescente, g crescente $\implies$ $g \circ f$ crescente;
2. f decrescente, g decrescente $\implies$ $g \circ f$ crescente;
3. f decrescente, g crescente $\implies$ $g \circ f$ e $f \circ g$ decrescenti.

1.9 Esercizio

Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano A, B sottoinsiemi di Y. Dimostrare che:

1. $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$;
2. $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$;
3. $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(A \setminus B)$.

Nota: Si ricorda che $f^{-1}(A)$ è la *controimmagine dell'insieme A tramite la funzione f*, cioè l'insieme definito come $f^{-1}(A) := \{x \in X \,:\, f(x) \in A\}$.

1.10 Esercizio

Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano A, B sottoinsiemi di X. Dimostrare che

1. $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$;
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
3. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

Dimostrare infine che in (2) e (3) vale l'uguaglianza quando f è iniettiva.

Nota: Si ricorda che $f(A)$ è l'*immagine dell'insieme A tramite la funzione f*, cioè l'insieme definito come $\quad f(A) := \{y \in Y \,:\, y = f(x) \text{ per qualche } x \in A\}$.