

# Equazioni Differenziali Nonlineari

Laurea Magistrale in Matematica e in Matematica per le Applicazioni  
Registro Didattico a.a. 2012/2013

31 gennaio 2013

**Lezione 1-2 (1 ottobre 2012)** Generalità sulle Equazioni alle Derivate Parziali (EDP). Equazione di Laplace e di Poisson. Funzioni armoniche: formule del valor medio; principi di massimo e di massimo forte. Principio di confronto per l'equazione di Poisson rispetto al dato al bordo.

**Lezione 3-4 (5 ottobre 2012)** Funzioni armoniche: regolarità  $C^\infty$ ; stabilità; stime locali e analiticità (senza dimostrazione); Teorema di Liouville; disuguaglianze di Harnack.

**Lezione 5-6 (8 ottobre 2012)** Esistenza di soluzioni: soluzioni fondamentali; formula per soluzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^N$ . Esistenza di soluzioni per l'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet al bordo: funzioni di Green.

**Lezione 7-8 (12 ottobre 2012)** Calcolo esplicito della funzione di Green in alcuni casi particolari: caso  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ ; caso  $\Omega = B_r$ .

**Lezione 9-10 (15 ottobre 2012)** Funzioni subarmoniche continue: definizione, confronto con il caso  $C^2$ ; principio di confronto; principio di massimo e massimo forte.

**Lezione 11-12 (19 ottobre 2012)** Esistenza di soluzioni all'equazione di Laplace con dato al bordo continuo: metodo di Perron delle funzioni subarmoniche. Continuità al bordo della soluzione: nozione di barriera (debole) e di barriera locale. Condizione necessaria e sufficiente per la regolarità dei punti del bordo di  $\Omega$ . Condizioni geometriche sul bordo di  $\Omega$ : condizione della sfera esterna; condizione del cono esterno; conseguenze.

**Lezione 13-14 (22 ottobre 2012)** Metodo dell'energia per l'equazione di Poisson con dato di Dirichlet. Esistenza del minimo al problema variazionale tramite il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni.

**Lezione 15-16 (24 ottobre 2012)** Calcolo delle Variazioni: variazione prima ed equazione di Eulero–Lagrange; variazione seconda.

**Lezione 17-18 (29 ottobre 2012)** Esistenza di minimizzanti: il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, coercività, semicontinuità inferiore. Condizione sufficiente per la semicontinuità inferiore per la convergenza debole: convessità.

**Lezione 19-20 (31 ottobre 2012)** Minimi del funzionale di energia e soluzioni deboli dell'equazione di Eulero–Lagrange.

**Lezione 21-22 (5 novembre 2012)** Teorema di caratterizzazione delle funzioni  $W^{1,p}(\Omega)$  (i.e. Prop. IX.3 in H.Brezis, *Analisi Funzionale. Teoria ed applicazioni*. Liguori Editore). Regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione di Eulero–Lagrange.

**Lezione 23-24 (7 novembre 2012)** Regolarità delle soluzioni dell'equazione di Eulero–Lagrange. Funzioni convesse: generalità.

**Lezione 25-26 (19 novembre 2012)** Sottogradiente di funzioni convesse. Funzionali convessi: relazione tra i minimi e soluzioni deboli dell'equazione di Eulero–Lagrange.

**Lezione 27-28 (21 novembre 2012)** Minimi vincolati: vincolo integrale e moltiplicatori di Lagrange; problemi con ostacolo.

**Lezione 29-30 (26 novembre 2012)** Teoria delle soluzioni di viscosità: introduzione e definizione; teorema di stabilità.

**Lezione 31-32 (28 novembre 2012)** Applicazione del risultato di stabilità al metodo di viscosità evanescente. Equazioni di Hamilton–Jacobi del primo ordine: nozione di sopra e sottodifferenziale e sue proprietà.

**Lezione 33-34 (3 dicembre 2012)** Principi di confronto: caso di aperti limitati. Principio di confronto per  $H(x, u, p)$  monotone in  $u$  e uniformemente continue in  $x$ . Principio di confronto per  $H(x, u, p)$  coercive in  $p$  e Lipschitzianità delle sottosoluzioni.

**Lezione 35-36 (5 dicembre 2012)** Esistenza di sottosoluzioni strette e principio di confronto per Hamiltoniane convesse e coercive in  $p$ . Regolarizzazione di sottosoluzioni strette.

**Lezione 37-38 (10 dicembre 2012)** Principio di confronto in  $\mathbb{R}^N$ . Risultati di esistenza di soluzioni per Hamiltoniane coercive in  $\mathbb{R}^N$ : metodo di Perron; stabilità della nozione di sottosoluzione rispetto al sup.

**Lezione 39-40 (12 dicembre 2012)** Equazione di Hamilton–Jacobi con dato di Dirichlet al bordo: risultato di esistenza e unicità della soluzione. Hamiltoniane convesse: equivalenza tra diverse definizioni di sottosoluzione. Funzione distanza ed equazione eiconale.

**Lezione 41-42 (17 dicembre 2012)** Equazioni di tipo eiconale e metodi metrici: semidistanza, problema di Dirichlet, condizioni di compatibilità sul dato al bordo.

**Lezione 43-44 (19 dicembre 2012)** Equazioni evolutive di H–J: principio di confronto (solo enunciato), esistenza di soluzioni del problema di Cauchy associato tramite metodo di Perron (cenni alla dimostrazione); cenni alla nozione di inf e sup convoluzione.

**Lezione 45-46 (7 gennaio 2013)** Equazioni evolutive di H–J: formula di Lax–Oleinik; funzione valore e sua regolarità; principio della programmazione dinamica e proprietà di semigrupp.

**Lezione 47-48 (9 gennaio 2013)** Dualità convessa: trasformata di Fenchel; condizioni equivalenti per l'uguaglianza nella disuguaglianza di Fenchel; bi-trasformata di Fenchel di una funzione convessa. Teorema: la funzione valore è soluzione del problema evolutivo.