Istituzioni di Analisi Superiore

Laurea Magistrale in Matematica & Matematica per le Applicazioni

Registro Didattico a.a. 2015/2016

16 febbraio 2016

Lezione 1-2 (28 settembre 2015) Introduzione al corso. Teoria della misura: cosa vuol dire "misurare" e quali sono le principali problematiche. Controesempio di Vitali (insieme non misurabile in $\mathbb{R}$). Misura di Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$: definizione e sue proprietà.

Lezione 3-4 (29 settembre 2015) Connessione con l'integrale di Riemann. Insiemi non misurabili secondo Peano–Jordan e funzioni non integrabili secondo Riemann. Teoria dell'integrazione astratta: algebre e σ–algebre; definizione di misura (numerabilmente additiva).

Lezione 5-6 (30 settembre 2015) Proprietà di una misura: monotonia, subadditività numerabile, continuità dall'alto e dal basso. Misure complete e completamento di un misura (Teorema). Misure esterne: definizione, costruzione di una misura esterna. Nozione di misurabilità (alla Caratheodory) rispetto ad una misura esterna. Teorema di Caratheodory.

Lezione 7-8 (5 ottobre 2015) Definizione di premisura. Costruzione di una misura esterna a partire da una premisura e sue proprietà.

Lezione 9-10 (6 ottobre 2015) La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$: dimostrazione che la misura elementare dei plurirettangoli costituisce una premisura. Derivazione della misura di Lebesgue e sue proprietà dai risultati astratti. Esempi: l'insieme $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ è misurabile secondo Lebesgue (ma non secondo Peano Jordan); i razionali gonfiati (esempio di aperto non limitato e denso in $\mathbb{R}$ di misura piccola a piacere); l'insieme di Vitali non è misurabile secondo Lebesgue; l'insieme di Cantor e sue proprietà. Regolarità interna ed esterna della misura di Lebesgue.

Lezione 11-12 (7 ottobre 2015) Conseguenze della regolarità esterna e interna della misura di Lebesgue: $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$ è il completamento di $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$; confronto tra la misura di Lebesgue e quella di Peano-Jordan e caratterizzazione degli insiemi PJ–misurabili (vedi esercizi). Teoria dell'integrazione: definizione di funzione $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$–misurabile tra due spazi misurabili $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$; la composizione di funzioni misurabili è misurabile; una funzione continua tra due spazi topologici X e Y è $(\mathscr{B}(X), \mathscr{B}(Y))$–misurabile. Caso di $Y = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $\mathcal{N} = \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$: somma, prodotto, inf, sup, liminf e limsup di funzioni misurabili è misurabile; le parti positiva e negativa di una funzione misurabile sono misurabili; definizione di funzione semplice.

Lezione 13-14 (12 ottobre 2015) Integrazione di funzioni a valori nella retta estesa: approssimazione di funzioni non negative con funzioni semplici; definizione di integrale di una funzione semplice e sue proprietà; teorema della convergenza monotona.

Lezione 15-16 (13 ottobre 2015) Additività dell'integrale. Lemma di Fatou. Definizione di integrale per funzioni di segno variabile; definizione di funzione integrabile. Lo spazio delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale e l'integrale un funzionale lineare.

Lezione 17-18 (14 ottobre 2015) Funzione di Cantor–Vitali (o scala del Diavolo) e derivati: esempio di funzione continua che manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva; esempio di funzione continua tale che la controimmagine di un insieme Lebesgue misurabile è non misurabile; esempio di insieme Lebesgue misurabile non Boreliano.

Lezione 19-20 (19 ottobre 2015) Integrazione di funzioni complesse, spazio $L^1(X;\mathbb{C})$. Scambio tra integrale e serie (teorema). Derivazione sotto il segno di integrale. Relazioni tra i vari tipi di convergenze per funzioni L^1.

Lezione 21-22 (20 ottobre 2015) Convergenza L^1 vs. convergenza quasi ovunque. Teorema di Egoroff. Spazi prodotto, σ–algebre prodotto, misure prodotto.

Lezione 23-24 (21 ottobre 2015) Teorema di Fubini–Tonelli ed esempi.

Lezione 25-26 (26 ottobre 2015) Non completezza di $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathbb{N}, \mu \times \nu)$. Teorema di Fubini-Tonelli per il completamento di $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathbb{N}, \mu \times \nu)$. Applicazioni: relazione tra integrale di una funzione e sua funzione di distribuzione; convoluzioni.

Lezione 27-28 (27 ottobre 2015) Generalità su spazi vettoriali normati: definizione di norma; caratterizzazione della completezza tramite serie; definizione di prodotto scalare; disuguaglianza di Schwartz; il prodotto scalare induce una norma; identità del parallelogramma; definizioni di spazi di Banach e di Hilbert. Spazi $L^p(X,\mu)$: introduzione; definizione di ℓ^p; $\|\cdot\|_p$ non è una norma su $L^p(X,\mu)$ per $0 < p < 1$.

Lezione 29-30 (2 novembre 2015) Disuguaglianza di Hölder, disuguaglianza di Minkowski, $L^p(X)$ è uno spazio di Banach per $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Lezione 31-32 (3 novembre 2015) Relazioni tra spazi $L^p(X)$ al variare di p. Separabilità di $L^p(X)$ per $1 \leqslant p < +\infty$: dimostrazione nel caso di X sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e μ misura di Lebesgue. Non separabilità di $L^\infty(X)$: dimostrazione nel caso X sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e μ misura di Lebesgue e nel caso ℓ^∞.

Lezione 33-34 (4 novembre 2015) Convoluzione $f * g$ di due funzioni f, g: caso $f \in L^1$ e $g \in L^p$; caso $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$; definizione generalizzata di supporto di una funzione; supporto di $f * g$; caso $f \in \mathrm{C}^k_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Lezione 35-36 (16 novembre 2015) Mollificatori e regolarizzazione. Convergenza di $\rho_n * f$ a f: convergenza locale uniforme nel caso $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^N)$; convergenza in $L^p(\mathbb{R}^N)$ nel caso $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Corollari: densità di $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per $1 \leqslant p < +\infty$; se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, la relazione $\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ per ogni $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ implica $u = 0$ q.o. in Ω.

Lezione 37-38 (17 novembre 2015) Densità di $C_c(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Funzionali lineari su spazi vettoriali normati: funzionali lineari, funzionali lineari continui, funzionali lineari limitati. Duale di uno spazio vettoriale normato, norma duale, proprietà. Relazione tra il duale di $L^p(X)$ e $L^q(X)$ (con p e q esponenti coniugati).

Lezione 39-40 (18 novembre 2015) Teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di $L^p(X)$ con $1 \leqslant p < +\infty$ (solo enunciato). L'inclusione $L^1(X) \subseteq \big(L^\infty(X)\big)'$ è sempre stretta (a parte il caso in cui $L^\infty(X)$ sia finito dimensionale): enunciato ed esempio nel caso di X aperto di $\mathbb{R}^d$ con la misura di Lebesgue. Convergenza debole di successioni in $L^p(X)$ per $1 \leqslant p < +\infty$: definizione e proprietà fondamentali. Convergenza star–debole di successioni in $L^\infty(X)$: definizione e principali proprietà. Esempi.

Lezione 39-40 (23 novembre 2015) Un esempio notevole di successione debolmente convergente in $L^p(X)$: $f_n := f(nx)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile, limitata e 1–periodica converge debolmente a $\int_0^1 f\,\mathrm{d}x$ in $L^p([0,1])$ per ogni $1 < p < +\infty$. Esercizi su spazi $L^p(X)$.

Lezione 41-42 (24 novembre 2015) Estensione di funzionali lineari in spazi vettoriali reali: Teorema di Hahn–Banach (forma analitica). Corollari in spazi vettoriali reali normati. Separazione di insiemi convessi: Teorema di Hahn–Banach (prima forma geometrica).

Lezione 43-44 (25 novembre 2015) Separazione di insiemi convessi: Teorema di Hahn–Banach (seconda forma geometrica) e conseguenze. Esercizio su funzionali lineari continui su spazi vettoriali normati.

Lezione 45-46 (30 novembre 2015) Esercizi. Esempi e tecniche in spazi di Banach: Teorema di Baire; definizione di insieme raro.

Lezione 47-48 (1 dicembre 2015) Teorema di Banach–Steinhaus e applicazioni. Teorema della mappa aperta e applicazioni.

Lezione 49-50 (2 dicembre 2015) Teorema del grafico chiuso. Cenni sulle funzioni convesse e loro caratterizzazione tramite sottodifferenziale.

Lezione 51-52 (9 dicembre 2015) Cenni sulle funzioni convesse in spazi vettoriali normati. Spazi di Hilbert complessi: esistenza e unicità di un elemento di norma minima in un convesso chiuso non vuoto; operatore di proiezione su un convesso e sue proprietà.

Lezione 53-54 (14 dicembre 2015) Spazi di Hilbert complessi: proiezione su un sottospazio vettoriale e proprietà. Teorema di rappresentazione di Riesz–Fréchet. Insiemi ortonormali: definizioni.

Lezione 55-56 (15 dicembre 2015) Studio di $\ell^2(A)$ con A insieme qualsiasi (anche non numerabile). Insiemi ortonormali: proiezione sullo span di un numero finito di elementi dell'insieme ortonormale; proiezione sullo span dell'insieme ortonormale; insiemi ortonormali massimali e loro proprietà; isomorfismo tra uno spazio di Hilert H con una base ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ed $\ell^2(A)$.

Lezione 57-58 (16 dicembre 2015) Ogni spazio di Hilbert possiede una base ortonormale. Caso di uno spazio di Hilbert separabile. Applicazione: funzioni in $L^2(\mathbb{S}^1)$ e coefficienti di Fourier.

Lezione 59-60 (21 dicembre 2015) Qualche richiamo di topologia. Come costruire la topologia più debole su X che rende continue una famiglia $(\varphi_i)_{i\in I}$ di funzioni $\varphi_i : X \to Y_i$ e sue proprietà.

Lezione 61-62 (22 dicembre 2015) La topologia debole $\sigma(E, E')$: definizione e proprietà fondamentali. Topologia debole vs. topologia forte: dimensione finita, dimensione infinita. Chiusura debole dei convessi chiusi. Applicazione alle funzioni convesse e semicontinue inferiormente. Esempio: esistenza del minimo per una funzione coerciva, convessa e semicontinua inferiormente su $L^p(\Omega)$.

Lezione 63-64 (11 gennaio 2016) Lemma di Mazur e sue applicazioni. Esercizi: in uno spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Lezione 65-66 (12 gennaio 2016) Qualche richiamo di topologia: definizione di compattezza e compattezza per successioni per uno spazio topologico X; le due nozioni sono equivalenti in uno spazio metrico; X compatto ed N_1 è compatto per successioni; X compatto per successioni ed N_2 è compatto. Spazi riflessivi: definizione; loro caratterizzazione in termini di compattezza debole per la topologia $\sigma(E, E')$ della palla unitaria (solo enunciato); caratterizzazione in termini di compattezza per successioni limitate (solo enunciato). Riflessivita' degli spazi $L^p(X)$ con $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura σ–finito e $1 < p < +\infty$; riflessivita' degli spazi di Hilbert.

Lezione 67-68 (13 gennaio 2016) La topologia debole star $\sigma(E', E)$ e sue proprietà: è T_2; è N_1 se E è separabile. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki (solo enunciato); compattezza delle successioni limitate in E' se E è separabile. Esercizi: ogni funzionale lineare continuo definito su un sottospazio vettoriale di un Hilbert ammette una unica estensione che conserva la norma; gli spazi $L^p(\Omega)$ sono strettamente convessi se e solo se $1 < p < +\infty$.

Referenze bibliografiche: per le lezioni 1–30, 37–40 si veda G.B. FOLLAND, Real Analysis (capitoli 1, 2, 5, 6, 7). Per le lezioni 31–36, 39–48, 51–54, 59–68 si veda H. BREZIS, Analisi Funzionale. Per le lezioni 45–48, 51–52, 55–58 si veda W.RUDIN, Real and Complex Analysis.